２０１２年度数学科学 III（足助担当）　演習問題　　'12/7/13（金）２限
'12/7/6 配布
'12/7/10 一部訂正
'12/7/18 再訂正

以下では特に断らなければ $\mathbb{R}^n$ には通常のリーマン計量をいれる．また，$\mathbb{R}^n$ の部分多様体には $\mathbb{R}^n$ から定まるリーマン計量を入れ，それぞれ $\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle$ で表す．

問 1. $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$ を $X = x\dfrac{\partial}{\partial x} + y\dfrac{\partial}{\partial y} + \dfrac{\partial}{\partial z}$ により定める（左辺は $X_{(x,y,z)}$ とした方が丁寧だが省略する）．

1) $\mathbb{R}^3$ 上の C^∞ 級函数 f であって，$\operatorname{grad} f = X$ が成り立つものを一つ求めよ．
2) $Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$ は $Y(f) = 0$（f は 1) で求めたもの）をみたすとする．このとき $\langle X|Y\rangle = 0$ が成り立つことを示せ．なお，左辺は $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ に対して $\langle X_{(x,y,z)}|Y_{(x,y,z)}\rangle$ を与える函数である．
3) X の積分曲線を求めよ．

問 2. 1) $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ を C^∞ 級の函数とする．$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = 0$ が成り立つことを示せ．
2) $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$ とする．$\operatorname{div}(\operatorname{rot} X) = 0$ が成り立つことを示せ．

問 3. 1) Poincaré の補題と，rot，grad の定義を用いて，$X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$ が $\operatorname{rot} X = 0$ をみたせばある $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ が存在して $X = \operatorname{grad} f$ が成り立つことを示せ．
2) Poincaré の補題と，div，rot の定義を用いて，$X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$ が $\operatorname{div} X = 0$ をみたせばある $Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$ が存在して $X = \operatorname{rot} Y$ が成り立つことを示せ．
3) $X = y^3z^2\dfrac{\partial}{\partial x} + 3xy^2z^2\dfrac{\partial}{\partial y} + 2xy^3z\dfrac{\partial}{\partial z}$ と置く．$\operatorname{rot} X = 0$ であることを示し，$\operatorname{grad} f = X$ なる $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ を一つ求めよ．
4) $X = e^{-y-z}\dfrac{\partial}{\partial x} + e^{-x-z}\dfrac{\partial}{\partial y} + e^{-x-y}\dfrac{\partial}{\partial z}$ と置く．$\operatorname{div} X = 0$ であることを示し，$\operatorname{rot} Y = X$ なる $Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$ を一つ求めよ．

問 4. $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$ とし，$d\omega = 0$ とする．Poincaré の補題により，ある $\eta \in \Omega^{k-1}(\mathbb{R}^n)$ が存在して $\omega = d\eta$ が成り立つ．$\zeta \in \Omega^{k-1}(\mathbb{R}^n)$ について $\omega = d\zeta$ が成り立つとすると，ある $\mu \in \Omega^{k-2}(\mathbb{R}^n)$ が存在して $\eta - \zeta = d\mu$ が成り立つことを示せ．

問 5. $B^3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$ には $\mathbb{R}^3$ から自然に定まる向きを入れ，S^2 には B^3 の境界としての向きを入れる．

1) $\omega \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$ を $\omega = x^3dy\wedge dz + y^3dz\wedge dx + z^3dx\wedge dy$ により定める．$\displaystyle\int_{S^2}\omega$ を求めよ[†1]．
2) $f(x,y,z) = x^3+y^3+z^3$ とする．f は S^2 上で最大値及び最小値を取ることを示せ．また，S^2 上での f の最大値と最大値を取る点，及び最小値と，最小値を取る点をそれぞれ求めよ．

[†1] 厳密に言えば $\iota\colon S^2 \to \mathbb{R}^3$ を包含写像とし，$\displaystyle\int_{S^2}\iota^*\omega$ とすべきであるが，記号が重たくなるので特別な理由がない限りこのようにすることは少ない．

問 6. 以下に挙げる $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ 上のベクトル場 X を極座標表示に書き替えよ．より形式的に言えば，$f\colon \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ を $f(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ により定めるとき，$Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ であって $f_{*p}Y_p = X_{f(p)}$ が任意の $p \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ について成り立つものを求めよ，ということである．

1) $X = x^2 \dfrac{\partial}{\partial x} + y^2 \dfrac{\partial}{\partial y}$
2) $X = xy \dfrac{\partial}{\partial x} + \dfrac{\partial}{\partial y}$
3) $X = \log(x^2+y^2) \dfrac{\partial}{\partial x} + \dfrac{1}{x^2+y^2} \dfrac{\partial}{\partial y}$

問 7. $\mathbb{R}^3$ と $\mathbb{R}^2$ の通常の座標をそれぞれ (x,y,z) と (u,v) とする．また，$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ を $f(x,y,z) = (x^2+y, xz)$ により定める．

1) $\omega = -vdu + udv$ とするとき，$f^*\omega$ を求めよ．
2) $\mathbb{R}^3$ の部分集合（実際には 1 次元部分多様体）C を $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 1,\ y^2+z^2 = 1\}$ により定める．C には $-z\dfrac{\partial}{\partial y} + y\dfrac{\partial}{\partial z}$ が正の向きである（C の向きと整合的になるような）向きを入れる．このとき $\displaystyle\int_C f^*\omega$ を求めよ．

問 8. M を $\mathbb{R}^m$ の境界のない k 次元部分多様体，N を $\mathbb{R}^n$ の境界のない l 次元部分多様体とする．$M \times N = \{(x,y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \mid x \in M,\ y \in N\}$ と置く．

1) $M \times N$ は $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{m+n}$ の境界のない $(k+l)$ 次元部分多様体であることを示せ．
2) $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$，$g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ とする．$(x,y) \in \mathbb{R}^{m+n}$ について $h(x,y) = f(x) + g(y)$ と置くと，$\operatorname{grad} h = \operatorname{grad} f + \operatorname{grad} g$ が成り立つことを示せ．ただし，$\mathbb{R}^m$，$\mathbb{R}^n$ の座標をそれぞれ $(x_1,\dots,x_m)$，$(y_1,\dots,y_n)$ とするとき，$X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^m)$ を $X + 0\dfrac{\partial}{\partial y_1} + \cdots + 0\dfrac{\partial}{\partial y_n}$ と同一視することにより $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^{m+n})$ とみなす．$\mathbb{R}^n$ 上のベクトル場についても同様に $\mathbb{R}^{m+n}$ 上のベクトル場とみなす．
3) 2) と同じ状況で，f'，g' でそれぞれ f, g の M，N への制限を表すこととする．h' を h の $M \times N$ への制限とすると $\operatorname{grad} h' = \operatorname{grad} f' + \operatorname{grad} g'$ が成り立つことを示せ．

問 9. M, N をコンパクトで境界のない[†2] 多様体，$f\colon M \to N$ を微分同相写像とする．また，g を M の，h の N のそれぞれリーマン計量とする．

1) $p \in M$，$v, w \in T_pM$ の時 $(f^*h)_p(v,w) = h_{f(p)}(f_{*p}v, f_{*p}w)$ と定める．f^*h は M のリーマン計量であることを示せ（本来は f^*h がある意味で C^∞ 級であることを示す必要があるが，よく分からなければさしあたり各 $p \in M$ について $(f^*h)_p$ が T_pM の内積を定めることを示せばよい）．
2) $f^*h = g$ が成り立つとする（このとき f は (M,g) から (N,h) への等長写像と呼ばれる）．また，M, N は向き付けられていて，f は向きを保つとする．このとき $\mathrm{vol}_g M = \mathrm{vol}_h N$ が成り立つことを示せ．

[†2] 更に M, N が「つながっている」（連結である）時には M, N は閉（closed）であると言う．

問 10. $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ 上の 1-形式 ω を $\omega = \dfrac{-ydx + xdy}{x^2+y^2}$ により定める．

1) $d\omega$ を求めよ．
2) $C_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}$ と置き，正の向き（反時計回りの向き）を入れる．$\displaystyle\int_{C_1} \omega$ を求めよ[†3]．
3) $C_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2+y^2=9\}$ と置き，正の向き（反時計回りの向き）を入れる．$\displaystyle\int_{C_2} \omega$ を求めよ．

問 11. $f\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ を $f(z_1,\dots,z_n) = |z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2 - 1$ により定める．

1) $S^{2n-1} = \{p \in \mathbb{C}^n \mid f(p) = 0\}$ と置く．$\mathbb{C}^n$ を自然に $\mathbb{R}^{2n}$ とみなすと，S^{2n-1} は $\mathbb{R}^{2n}$ の部分多様体であることを示せ．また，次元を求めよ．
2) $(1,0,\cdots,0) \in S^{2n-1}$ の周りの座標（座標近傍）を一つ取れ．
3) $n=2$ とする．S^3 の座標近傍系を一つ取れ．

問 12. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を C^∞ 級の函数とし，$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+1) = f(x)$ が成り立つとする．$S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}$ と置くと，f は S^1 上の C^∞ 級函数を自然に定めることを示せ．商空間について既習であれば，S^1 を $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ に置き換えて考えてみよ．また，$\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ に，S^1 と微分同相であるような多様体の構造が入ることを示せ（きちんと解こうとすると，まず $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ に位相空間の構造を入れないといけないのでそれなりに面倒である）．

問 13 (やや難しい)**.** $T\mathbb{R}^n = \displaystyle\bigcup_{p\in\mathbb{R}^n} T_p\mathbb{R}^n$ を $T\mathbb{R}^n$ の接空間とする．$q \in T\mathbb{R}^n$ とする．ある $p \in \mathbb{R}^n$ が存在して $q \in T_p\mathbb{R}^n$ である．また，$T_p\mathbb{R}^n = \left\{ v_1 \dfrac{\partial}{\partial x_1}_p + \cdots + v_n \dfrac{\partial}{\partial x_n}_p \,\middle|\, v_1,\dots,v_n \in \mathbb{R} \right\}$ であるから，q は $p \in \mathbb{R}^n$ と $(v_1,\dots,v_n) \in \mathbb{R}^n$ の組を用いて表すことができる．そこで対応 $q \mapsto (p,(v_1,\dots,v_n))$ により $T\mathbb{R}^n$ を $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n\ (= \mathbb{R}^{2n})$ と同一視し，C^∞ 級多様体とみなす．

これを踏まえ，M を $\mathbb{R}^m$ の部分多様体とする時，以下のように考えてみる[†4]．$TM = \displaystyle\bigcup_{p\in M} T_pM$ を M の接空間とする．$q \in TM$ とすると $p \in M$ が存在して $q \in T_pM$ である．(U,V,φ) を p の周りの座標近傍とする．ただし，$U,V \subset \mathbb{R}^m,\ \varphi\colon U \xrightarrow{\sim} V,\ \varphi(U\cap M) = V \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})$ とする．また，$\overline{V} = V \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})$ と置く．$V \subset \mathbb{R}^m$ の標準的な座標を $(x_1,\dots,x_m)$ とすると，$x \in \varphi(U\cap M) = \overline{V}$ における $T_x(\varphi(U \cap M)) = T_x\overline{V}$ の基底として $\left\{ \dfrac{\partial}{\partial x_1}_x, \dots, \dfrac{\partial}{\partial x_n}_x \right\}$ が取れる（添字に注意）．そこで $\psi\colon \overline{V} \times \mathbb{R}^n \to TM$ を

$$\psi(x,(v_1,\dots,v_n)) = (D\varphi^{-1})_x \left(v_1 \frac{\partial}{\partial x_1}_x + \cdots + v_n \frac{\partial}{\partial x_n}_x \right)$$

により定める．

1) $W = \psi\left(\overline{V} \times \mathbb{R}^n\right)$ と置く．ψ は $\overline{V} \times \mathbb{R}^n$ から W への全単射であることを示せ．

[†3] †1 と同様である．

[†4] 適切に定義を書き換えれば，M は一般の多様体として良い．

2) $p \in M$ とする．一般の多様体の場合には T_pM は $\mathbb{R}^m$ の部分集合ではないが，今の場合には ψ の右辺は自然に $\mathbb{R}^m$ の元とみなすことができる．実際，$\epsilon > 0$ を十分小さく取り，$l\colon (-\epsilon, \epsilon) \to \overline{V}$ を $l(t) = x + (v_1, \ldots, v_n)t$ により定めれば，定義により $(D\varphi^{-1})_x\left(v_1 \dfrac{\partial}{\partial x_1}_x + \cdots + v_n \dfrac{\partial}{\partial x_n}_x\right) = \dfrac{d(\varphi^{-1} \circ l)}{dt}(0)$ であるから，右辺は自然に $\mathbb{R}^m$ の元とみなせる．このようにして ψ を $\mathbb{R}^m$ への写像とみなすと C^∞ 級であることを示せ．

3) 実際には W は TM の開集合であって，ψ は C^∞ 級の微分同相写像である．そこで $\rho = \psi^{-1}$ とし，$(W, \overline{V} \times \mathbb{R}^n, \rho)$ を q の周りの座標近傍と考えることにする．このようにして得られる座標近傍全体は，TM に多様体の構造を定める（TM の座標近傍系となる）ことを示せ[†5]．

4) $\pi\colon TM \to M$ を $\pi(q) = p$ により定める．π は C^∞ 級の写像であることを示せ．

5) X を M 上の C^∞ 級のベクトル場とする．X は自然に M から TM の写像を定め，$\forall p \in M,\ \pi \circ X(p) = p$ が成り立つことを示せ．この事実を X は TM の（C^∞ 級の）切断であると言う．

※ 以下の文章の難易度は学部３年生程度である．今分からなくとも良い．

$p \in M$ とすると $\pi^{-1}(p) = \{q \in TM \mid \pi(q) = p\}$ は自然に n 次元実線型空間 T_pM と同一視できる[†6]．組 (π, TM, M) を M の接束（接バンドル，tangent bundle）と呼ぶ．同様のことが $TM^* = \bigcup_{p \in M} T_pM^*$ についても成り立つ．$\pi\colon TM^* \to M$ を $q \in TM^*$ に対して，$q \in T_pM^*$ なる唯一の p を与える写像として定め，(π, TM^*, M) を M の余接束（余接バンドル，cotangent bundle）と呼ぶ．余接束の切断が 1-形式である．接束や余接束はベクトル束（ベクトルバンドル，vector bundle）と呼ばれるものの例である．ベクトル束は大雑把に言えばベクトル空間を多様体上で一斉に考えたものである．特に，直和，直積，部分（線型）空間，商空間やテンソル積にあたるものなどを考えることができる．例えば $\overbrace{TM \otimes \cdots \otimes TM}^{p\,個} \otimes \overbrace{TM^* \otimes \cdots \otimes TM^*}^{q\,個}$ などと表されるベクトル束を考えることができる．これの切断はいわゆるテンソル場の最も基本的な例である．例えばリーマン計量は正値性および対称性をもつ $TM^* \otimes TM^*$ の切断である．正値性の代わりに符号が $(1, 3)$（あるいは $(3, 1)$）であることを要求すればローレンツ計量が得られる（ただし $\dim M = 4$ とする）．これらの事柄は例えば「添字の上げ下げ」や「テンソルの縮約」という操作（物理や微分幾何でよく用いられる）などと関連する．また，$\overbrace{TM^* \otimes \cdots \otimes TM^*}^{p\,個}$ の，交代性にあたる性質をもつ元の全体は部分バンドルをなし，$\bigwedge^p TM^*$ などと表される．このベクトル束の切断が p-形式である．つまり，$\bigwedge^p TM^*$ の C^∞ 級の切断全体の成す線型空間が $\Omega^p(M)$ である．より正確には p-形式には M 上の函数を掛ける操作も許され，「まともな演算規則」が成り立つのであった．このことを指して $\Omega^p(M)$ は $C^\infty(M)$-加群であるという．

（以上）

[†5] M が一般の場合にも同様の方法で TM に $2n$ 次元の多様体の構造が自然に入る．
[†6] $\mathbb{R}^n$ そのものではないことに注意．