２０１２年度数学IA演習（理I 35–39組）　第１３回追加問題　　'13/1/29（火）４限

問 13.1.

$$V=\left\{f\colon[0,+\infty)\to\mathbb{R}\;\middle|\;\begin{array}{l} f\text{ は連続であって，かつ，ある多項式 }P\text{ が存在して}\\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{P(x)}=0\text{ が成り立つ}\end{array}\right\},$$

$$V'=\left\{f\colon[0,+\infty)\to\mathbb{R}\;\middle|\;\begin{array}{l} f\text{ は連続であって，かつ，ある多項式 }P\text{ と }M>0\text{ が}\\ \text{存在して }x>M\text{ ならば }|f(x)|\le|P(x)|\text{ が成り立つ}\end{array}\right\},$$

$$V''=\left\{f\colon[0,+\infty)\to\mathbb{R}\;\middle|\;\begin{array}{l} f\text{ は連続であって，かつ，ある }n>0\text{ と }M>0\text{ が}\\ \text{存在して }x>M\text{ ならば }|f(x)|\le x^n\text{ が成り立つ}\end{array}\right\},$$

$$W=\left\{f\colon[0,+\infty)\to\mathbb{R}\;\middle|\;\begin{array}{l} f\text{ は連続であって，かつ，}t>0\text{ のとき}\\ \displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-tx}f(x)dx\text{ は収束する}\end{array}\right\}$$

と置く．$f\in W$ について，$\mathcal{L}f(t)=\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-tx}f(x)dx$ と置いて f の**ラプラス変換**と呼ぶ[†1]．$\mathcal{L}f$ は $\mathcal{L}(f)$ 等とも表す（全く異なる記号を用いることもある）．

1) $V=V'=V''$ が成り立つことを示せ．また，これらの等しい空間は実線型空間であることを示せ．

2) $V\subset W$ が成り立つことを示せ．また，W は実線型空間であり，V は W の部分線型空間（線型部分空間）であることを示せ．

3) $f\in W$ とし，f は C^1 級であるとする．すると $Df=f'\in W$ であって，更に $(\mathcal{L}Df)(t)=-f(0)+t(\mathcal{L}f)(t)$ が成り立つことを示せ．

ヒント：最後の式を示せば $f'\in W$ が成り立つことも示したことになる（何故か？）．

4) $f(x)=\sin x$ とすると，$f\in V$ が成り立つことを示せ．また，$\mathcal{L}f$ を求めよ．

5) $f\in W$，f は C^2 級と仮定し，$D^2f(x)+2Df(x)+f(x)=\sin x$ が成り立つとする．$\mathcal{L}f$ をなるべく簡潔に表せ．

6) $C=\{f\colon(0,+\infty)\to\mathbb{R}\,|\,f\text{ は連続}\}$ と置く．$\mathcal{L}$ を W から C への写像と看做すと線型写像であることを示せ．

$\mathcal{L}f=g$ とする．もし「$\mathcal{L}^{-1}g$」にあたる函数，あるいは $\mathcal{L}$ の「逆写像 $\mathcal{L}^{-1}$」を考えることができるのであれば f が求まることになる[†2]．

問 13.2.　1) $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ とする．$D\mathcal{L}f$ を求めよ．

2) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ を求めよ．

（以上）

[†1] W として少し異なる空間を用いる，つまり少し異なる函数たちについてラプラス変換を考えることもある．ここでは細かいことを気にせずにすむようにやや小さい空間を用いている．

[†2] f や g として「まともな」函数を考えている場合には例えば留数を用いて $\mathcal{L}^{-1}$ を定めることができる（ラプラス逆変換）．ここではこれ以上扱わない．