

問 11.1. 1) $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ とし, $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ を可積分な函数とする (解答に困難を

感じる場合には (発表を含めて) とりあえず連続として良い). このとき, f は

(a, b) 上広義積分可能であって, $\int_{(a,b)} f(x)dx = \int_{[a,b]} f(x)dx$ が成り立つことを示せ.

また, (a, b) を $(a, b]$ あるいは $[a, b)$ としても同様のことが成り立つことを示せ.

2) $-\infty < a < b \leq +\infty$ とし, $f: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ を連続な, 広義可積分な函数とする.

このとき, f は (a, b) 上広義可積分であって $\int_{(a,b)} f(x)dx = \int_{[a,b)} f(x)dx$ が成り立つ

ことを示せ. また, $[a, b)$ を $(a, b]$ としても同様のことが成り立つことを示せ.

問 11.2. $-\infty < a < b \leq \infty$ とし, $f, g: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ を連続函数とする. また, f, g は $[a, b)$ 上広義可積分であるとする. このとき, 任意の $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ について $\lambda f + \mu g$ も $[a, b)$ 上広義可積分であって,

$$\int_{[a,b)} (\lambda f + \mu g)(x)dx = \lambda \int_{[a,b)} f(x)dx + \mu \int_{[a,b)} g(x)dx$$

が成り立つことを示せ. また, (a, b) を $(a, b]$ あるいは $[a, b)$ としても同様のことが成り立つことを示せ.

問 11.3. $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ とし, $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ を連続とする. $\varepsilon > 0$ が与えられたとする

と, $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$ をみたす $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ と, $t_0, \dots, t_{n-1} \in \mathbb{R}$ が存在して,

$g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ を $g(x) = \begin{cases} t_i, & a_i \leq x < a_{i+1}, \\ t_{n-1}, & x = a_n \end{cases}$ (最後は t_n の誤りではない) により定め

ると, $\sup_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)| < \varepsilon$ が成り立つことを示せ.

問 11.4 (問 1.2 も参照のこと). $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ とし, $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ を連続とする (ただ

し $n \in \mathbb{N}$). また, 函数 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ について $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f(x)| = 0$ が成り立つとする.

1) f は連続であることを示せ.

2) 1)により f は $[a, b]$ 上可積分である. 積分について, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$ が成り立つことを示せ.

問 11.5 (リーマン・ルベーグの定理). $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$ とし, $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ を連続とする.

このとき $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) \sin(\lambda x) dx = 0$ が成り立つことを示せ.

ヒント: 問 11.3 と 11.4 を用いても良いし, 直接示しても良い. ただ, 直接示そうとしても (普通に証明すると) 前問を用いたのと大差無いと思われる.

問 11.6. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ を求める (被積分函数は $x = 0$ まで連続に拡張されるから, 問 11.1 により 0 での振る舞いはあまり気にしなくて良いことに注意).

1) $g: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ を $g(t) = \begin{cases} \frac{2}{x} - \frac{1}{\sin \frac{x}{2}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ により定める. g は連続であることを示せ.

2) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{(2n+1)\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx$ であるが, このことと, リーマン・ルベーグの定理 (問 11.5) を用いて $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi} \frac{\sin \frac{2n+1}{2}t}{2 \sin \frac{1}{2}t} dt$ が成り立つことを示せ.

3) $\int_0^{\pi} \frac{\sin \frac{2n+1}{2}t}{2 \sin \frac{1}{2}t} dt$ と $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi} \frac{\sin \frac{2n+1}{2}t}{2 \sin \frac{1}{2}t} dt$ を求めよ.

4) (「留数 (residue)」について知らないとも足も出ないので, 現時点では「ちんぷんかんぷん」で構わない¹. 数学を使う学科に進学する場合には嫌と言うほど見ることになると思う.)

x は複素数でも良いと考えることにして函数 $f(z) = \frac{e^{\sqrt{-1}z}}{z}$ を考える. f は $z = 0$ 以外では正則 (複素解析的) な函数であって, $z = 0$ は一位の極 (pole) である.

$\delta, R_1, R_2 > 0$, $0 < \delta < \min\{R_1, R_2\}$ とし, $\gamma_{\delta, R_1, R_2}$ を次のような積分路とする. ま

¹すぐに解ければ (一変数複素解析的函数の) 留数についてある程度理解できていると考えて良い. ちなみに, S^1 に正の向きを入れると $\int_{S^1} \frac{dz}{z} = 2\pi\sqrt{-1}$ であって, 代数学の基本定理の証明などに現れたが, これは留数定理の一番簡単な場合である. 複素解析に関する入門書としては 複素解析, L.V. アールフォルス著, 笠原乾吉訳と, 複素函数論, H. カルタン著, 高橋礼司訳を挙げておく.

ず $R_1, R_1 + \sqrt{-1}R_2, -R_1 + \sqrt{-1}R_2, -R_1$ を頂点とする長方形を考え、反時計回りの向きを入れる。この長方形から $-\delta$ と δ を結ぶ線分を取り去り、代わりに、原点を中心とする半径 δ の円周の下半分を考えてこれをつなぐ。向きは全体として反時計回りになるように自然に入れ、これを $\gamma_{\delta, R_1, R_2}$ とする。

4a) $\lim_{\substack{\delta \searrow 0 \\ R_1 \rightarrow +\infty \\ R_2 \rightarrow +\infty}} \int_{\gamma_{\delta, R_1, R_2}} f(z) dz$ を求めよ。いかにも極限は簡単にとれるように書いてあるが、重極限（三重極限）なのでどのように取るか考える必要が（どのように取ってもよいことを示す必要が）ある。

4b) 積分路 $\gamma_{\delta, R_1, R_2}$ は自然に六分割される。それぞれの部分での積分の極限での振る舞いについて考察して $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ を求めよ（ここでは 4a) の積分のうち虚部しか必要にならないが、実部にもきちんと意味をつけることができる (Cauchy の主値)）。

問 11.7. $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ と置く。 $\Gamma: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$$

により定める。 Γ を**ガンマ関数**と呼ぶ。また、 $B: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ （ここで、 $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}^+, y \in \mathbb{R}^+\}$ である。つまり、 \mathbb{R}^+ の二つの元の組全体のなす集合を $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ で表す。）を

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$$

により定める。 B を**ベータ関数**と呼ぶ^{†2}。

- 1) $\Gamma(x)$ を定める積分は絶対収束することを示せ。
- 2) ガンマ関数は次の等式（函数等式）をみたすことを示せ。ただし $x > 0$ とする。

i) $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

^{†2}ここでの B はギリシア文字（のつもり）である。通常はラテン文字と（ほぼ）同形であるような文字（例えばアルファ A やゼータ Z ）は用いないが、このように例外的に用いることもある。ちなみにアルファ関数というものあって、 $A_n(x) = \int_1^{+\infty} e^{-xt} t^n dt$ ($n = 1, 2, \dots$) で定義される。

ii) $\Gamma(1) = 1$. 一般に $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$ ならば $\Gamma(n) = (n-1)!$.

iii) $\Gamma(x) > 0$.

iv) $\Gamma(x) = 2 \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r^{2x-1} dr$.

3) $B(x, y)$ を定める積分は絶対収束することを示せ.

4) $B(x, y) = B(y, x) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2x-1} \theta \cos^{2y-1} \theta d\theta$ が成り立つことを示せ.

5) $B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$ が成り立つことを示せ.

ヒント：二変数の広義積分と考えて座標変換するのが見やすい.

問 11.8 (微分積分学, 難波誠著, 裳華房から改題の上引用). $W = (0, 1) \times (0, 1) \subset \mathbb{R}^2$ と置く. また, $n \in \mathbb{N}$, $n > 3$ について $W_n = \left(\frac{2}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right) \times \left(\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right)$, $U_n = \left(\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right) \times \left(\frac{2}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right)$ と置く.

1) $\overline{W_n} \subset W_{n+1}$, $\overline{U_n} \subset U_{n+1}$ および $W = \bigcup_{n=4}^{+\infty} W_n = \bigcup_{n=4}^{+\infty} U_n$ が成り立つことを示せ.

2) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\overline{W_n}} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx dy$ と $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\overline{U_n}} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx dy$ は共に存在するが異なることを示せ.

3) $\int_W \left| \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right| dx dy$ は収束しないことを示せ. 従って 2) の積分はどちらも絶対収束していない.

この例は一変数の場合と異なり, 多変数 (二変数以上) の広義積分は素朴に考えようまくいかないことを意味している. 実際には絶対収束する広義積分以外のものを考えて (つまり, 条件収束にあたるものを考えて) 一般的な議論をしようとする, 何かしら破綻が生じる. 一方, 特定の函数 (あるいは函数族) に関する, 絶対収束しない積分もしばしば意味をもつので注意が必要である.

問^{†3} 11.9. $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ とする. (x, y) におけるベクトル (例えば (x, y) を通る C^1 級の曲線の接ベクトルが念頭にある) (v, w) について^{†4}, その長さ $\|(v, w)\|_{(x, y)}$ を

$$\|(v, w)\|_{(x, y)} = \frac{2}{1 + x^2 + y^2} \sqrt{v^2 + w^2}$$

により定める (もし前半の $\frac{2}{1 + x^2 + y^2}$ が無ければ (1 に置き換えれば) (v, w) の通常の長さである. 今はそうではなく, よくわからない補正項がついている).

- 1) $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ を固定する. すると $\|\cdot\|$ は (線型空間) \mathbb{R}^2 のノルムを定めることを示せ. もしユークリッド計量 (内積) は知っているが, ノルムは知らない場合には

$$g((v_1, w_1), (v_2, w_2))_{(x, y)} = \frac{4}{(1 + x^2 + y^2)^2} (v_1 v_2 + w_1 w_2)$$

と置くと, $g(\cdot, \cdot)_{(x, y)}$ は \mathbb{R}^2 のユークリッド計量 (内積) を定めることを示せ.

- 2) $l: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ が C^1 級の (正則とは限らない) 曲線であるとき, l の $l(0)$ から $l(s)$ までの長さ ($s \in [0, 1]$) $L(s)$ を

$$L(s) = \int_0^s \|Dl(t)\|_{l(t)} dt$$

により定める ($\|\cdot\|$ は上で定めたものであることに注意).

さて, $l_1, l_2: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ を $l_1(t) = \left(\cos \frac{\pi}{4}t, \sin \frac{\pi}{4}t\right)$, $l_2(t) = (1-t, t)$ により定める. l_1 の $l_1(0)$ から $l_1(1)$ までの長さを L_1 , l_2 の $l_2(0)$ から $l_2(1)$ までの長さを L_2 とすると $L_1 < L_2$ が成り立つことを示せ^{†5}.

(もし黒板を用いて発表するのであれば, ここで分けるのが目安である.)

^{†3}数学 IA の標準的な範囲からは逸脱している. 数理科学 III で扱うのが一般的であるが, 技術的には困難はないので身構える必要はない. 知らないよりは知っている方が得であろう.

^{†4}とりあえず $(v, w) \in \mathbb{R}^2$ と考えていけばよいが, 実際には (v, w) は (x, y) におけるベクトルなので, 例えば $(1, 0)$ を $p = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$ におけるベクトルと考えるときと, $q = (10, 10) \in \mathbb{R}^2$ におけるベクトルとそれぞれ考えるときには区別するべきである. その意味で, $p \in \mathbb{R}^2$ におけるベクトル全体の成す線型空間を $T_p \mathbb{R}^2$ で表す. 線型空間としては $T_p \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2$ である. このような考え方はベクトル場 (数理科学 I, II, III のいずれかで扱うことがある) を考えるときに重要である.

^{†5}実際には $(1, 0)$ と $(0, 1)$ の $\|\cdot\|$ に関する距離 d を $d = \inf_l \int_0^1 \|Dl(t)\|_{l(t)} dt$, ただし l は $(1, 0)$ と $(0, 1)$ を結ぶ, (区分的に) C^1 級の曲線全体を走る, により定めると $d = L_1$ であることが示せる. 既に扱った道具ばかりで示せるが, 現時点では難しい. 今示せばすばらしいが, 3年の夏学期が終わるあたりで示せば十分である.

$f: S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ を

$$f(t, s, u) = \left(\frac{t}{1-u}, \frac{s}{1-u} \right)$$

により定める.

- 3) f がどのような写像であるか, 図を用いて説明せよ.
- 4) f は全単射であることを示せ ($S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\}$ から \mathbb{R}^2 への写像が C^∞ 級であることの定義を適切にすれば, f は微分同相写像である). また, 逆写像を求めよ (逆写像は \mathbb{R}^2 から $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 1)\}$ への写像と考えると表しやすい).
- 5) f の逆写像を g とする. ここで, g は \mathbb{R}^2 から \mathbb{R}^3 への写像として表しておく. また, \mathbb{R}^3 の標準的なノルムを $\|\cdot\|$ で表す. $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ であれば $\|(a_1, a_2, a_3)\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ である. さて, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $(v, w) \in \mathbb{R}^2$ について

$$\|(v, w)\|'_{(x,y)} = \left\| Dg(x, y) \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \right\|$$

と置く (ベクトル (v, w) を左辺では行ベクトル, 右辺では列ベクトルで表しているので注意^{†6}). すると $\|(v, w)\|'_{(x,y)} = \|(v, w)\|_{(x,y)}$ が成り立つことを示せ (右辺は最初に定めた $\|\cdot\|$ である). 詳しくは述べないが, これは $\|\cdot\|$ が, 球面上の標準的な長さ (ノルム) を平面に写して得られたものであることを意味する.

(以上)

^{†6}悪い記法であるが右辺は行列の積なのであきらめる. 本来はここまで見越して最初から (v, w) は縦ベクトルで表さなければならない. もし避けがたければ本文のように明示すべきである. そうでなければ何が書いてあるのか読者にはわからない.