２０１２年度数学IA 演習（理I 35–39 組）　第８回　'12/11/6（火）４限
訂正:'12/11/16 誤植（問 8.2）の訂正，'13/1/9 誤植（問 8.3）の訂正

**問 8.1** (全て解析演習（杉浦著）からの引用．答えはあるので一人一つ)**.** 以下の函数のそれぞれについて原始函数を積分記号を含まない形で表せ．

1) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+2px+q}}$，ただし $p, q \in \mathbb{R}$.
2) $\dfrac{\cot x}{\log|\sin x|}$.
3) $e^{ax}\cos bx$，ただし $a, b \in \mathbb{R}$.
4) $\dfrac{x}{x^4-1}$.
5) $\dfrac{2x-5}{(x+3)(x+1)^2}$.
6) $\dfrac{x^7}{x^{12}-1}$.
7) $\dfrac{\sin x}{1+\sin x}$.
8) $\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}$.
9) $\operatorname{Arctan} x$.
10) $\dfrac{1+x^2}{1-x^2}\dfrac{1}{\sqrt{1+x+x^2}}$.

ただし，9) において $\operatorname{Arctan} x$ で $\tan^{-1} 0 = 0$ をみたす $\tan^{-1} x$ の分枝を表す．

**問 8.2.** $l\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ を $l(t) = t$ により定める．$l$ により定まる曲線の長さは $\displaystyle\int_0^1 \left|\frac{dl}{dt}(t)\right| dt = 1$ である．これを踏まえて以下の問に答えよ．

1) $l_1\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ を $l_1(t) = \sin\dfrac{\pi}{2}t$ により定める．$l_1$ により定まる曲線の長さを求めよ．また，$l$ と $l_1$ により定まる曲線を図形として比較せよ．
2) $l_2\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ を $l_2(t) = \cos\left(\left(t-\dfrac{1}{2}\right)\pi\right)$ により定める．$l_2$ により定まる曲線の長さを求めよ．また，$l$ と $l_2$ により定まる曲線を図形として比較せよ．
3) $s \in [0,1]$ とする．上の $l_2$ について $\displaystyle\int_0^s \frac{dl_2}{dt}(t)dt$ を求めよ．
4) $l_3\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ を $C^1$ 級の函数であって $l_3(0) = 0, l_3(1) = 1$ をみたすものとする．$s \in [0,1]$ について $\displaystyle\int_0^s \frac{dl_3}{dt}(t)dt$ を求めよ．また，$L(l_3) = \displaystyle\int_0^1 \left|\frac{dl_3}{dt}(t)\right| dt$ と置くと，$L(l_3) \geq 1$ が成り立つことと，$l_3$ を適当に（うまく）選べば $L(l_3)$ の値はいくらでも大きくできることを示せ．

**問 8.3.** $l\colon [0,1] \to \mathbb{R}^n$ を $C^1$ 級とし，$Dl$ は $[0,1]$ 上 0 にならないとする（つまり，$l$ を $C^1$ 級の正則な曲線とする）．$[a,b]$ を閉区間とし，$\varphi\colon [a,b] \to [0,1]$ を $C^1$ 級の微分同相写像とする．つまり，ある $C^1$ 級の写像 $\psi\colon [0,1] \to [a,b]$ が存在して $\psi\circ\varphi = \mathrm{id}_{[a,b]}$, $\varphi\circ\psi = \mathrm{id}_{[0,1]}$ がそれぞれ成り立つとする．ここで $\mathrm{id}_{[0,1]}\colon [0,1] \to [0,1]$ は $\mathrm{id}_{[0,1]}(t) = t$ で定まる（要は何もしない）写像であって, ($[0,1]$ の）恒等写像と呼ばれる．同様に $\mathrm{id}_{[a,b]}$ は $[a,b]$ の恒等写像である．

1) $\varphi(a) = 0$ または $\varphi(a) = 1$ が成り立つことを示せ．

2) $\varphi(a)=0$ ならば $[a,b]$ 上 $D\varphi(t)>0$ が，$\varphi(a)=1$ ならば $[a,b]$ 上 $D\varphi(t)<0$ が成り立つことを示せ.

3) $l_\varphi$ を $l\circ\varphi$ により定める．$l$ で与えられる曲線の長さを $L$，$l_\varphi$ により与えられる曲線の長さを $L_\varphi$ とすると $L_\varphi=L$ が成り立つことを示せ.

4) $\varphi$ を微分同相写像ではなく単に $C^1$ 級の写像とすると 3) において必ずしも $L_\varphi=L$ は成り立たないことを示せ.

5) $t\in[0,1]$ について $L(t)=\displaystyle\int_0^t |Dl(t)|\,dt$ と置く．$I=\{s\in\mathbb{R}\,|\,\exists t\in[0,1]\ \text{s.t.}\ s=L(t)\}$ と置くと，$L(t)$ は $[0,1]$ から $[0,I]$ への $C^1$ 級の微分同相写像であることを示せ.

6) 5) を踏まえて $\rho(s)=L^{-1}(x)$ と置く（$L$ の逆函数を $\rho$ とする）．$l'(s)=l\circ\rho$ と置くとき，$\|Dl'(s)\|$ を求めよ．また，$l'$ の変数 $s$ と，$l'$ で表される曲線の長さの関係を調べよ.

7) $n=2$ とし，$l(t)=(l_1(t),l_2(t))$ と成分で表す．$l_1,l_2$ はそれぞれ微分方程式 $\dfrac{dx}{dt}=f$ と $\dfrac{dy}{dt}=g$ をみたすとする．ここで $f,g$ は $[0,1]$ 上の連続函数とする．$l_\varphi(t)=l(\varphi(t))=(h_1(t),h_2(t))$ と成分を用いて表したとき，$h_1,h_2$ のみたすべき微分方程式を $f,g,\varphi$ などを用いて簡潔に表せ.

※ この問に現れるような微分方程式がどの程度，どのように解けるかは 3 学期の講義（この講義ではない）で扱う.

**問 8.4** (この問では $\mathbb{R}^n$ の元を列ベクトルを用いて表す).

1) $\varphi\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ を $v=\begin{pmatrix} r\\ \theta\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$ について $\varphi(v)=\begin{pmatrix} r\cos\theta\\ r\sin\theta\end{pmatrix}$ と置くことにより定める．$D\varphi$ を求め，$\det D\varphi(r,\theta)\gtreqless 0$ となる $(r,\theta)$ の範囲を図示せよ．また，$f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ を $C^2$ 級の函数とするとき，$\Delta f=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ と置く．$\Delta f$ を $\dfrac{\partial f}{\partial r}$，$\dfrac{\partial f}{\partial\theta}$ 等を用いて表せ．$\Delta f$ を $f$ のラプラシアン（Laplacian），$\Delta=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ を（函数に函数を対応させる）作用素と看做してラプラス作用素（Laplacian operator）と呼ぶ.

2) $\varphi\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ を $v=\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \psi\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$ について $\varphi(v)=\begin{pmatrix} r\cos\theta\cos\psi\\ r\cos\theta\sin\psi\\ \sin\psi\end{pmatrix}$ と置くことにより定める．また，$\mathbb{R}^3$ 上のラプラス作用素を $\Delta=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ により定める．これらについて 1) と同様の作業を行い，$\varphi(v)$ を図示せよ.

（以上）