２０１１年度数学科学 III（足助担当）　演習問題　　'11/7/11（月）２限
'11/7/11 一部訂正

以下では特に断らなければ $\mathbb{R}^n$ には通常のリーマン計量をいれる．また，$\mathbb{R}^n$ の部分多様体には $\mathbb{R}^n$ から定まるリーマン計量を入れ，それぞれ $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle$ で表す．

問 1. $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$ を $X = x\dfrac{\partial}{\partial x} + y\dfrac{\partial}{\partial y} + \dfrac{\partial}{\partial z}$ により定める（左辺は $X_{(x,y,z)}$ とした方が丁寧だが省略する）．

1) $\mathbb{R}^3$ 上の C^∞ 級函数 f であって，$\operatorname{grad} f = X$ が成り立つものを一つ求めよ．
2) $Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$ は $Y(f) = 0$（f は 1) で求めたもの）をみたすとする．このとき $\langle X|Y\rangle = 0$ が成り立つことを示せ．なお，左辺は $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ に対して $\langle X_{(x,y,z)}|Y_{(x,y,z)}\rangle$ を与える函数である．

問 2. 1) $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ を C^∞ 級の函数とする．$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = 0$ が成り立つことを示せ．
2) $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$ とする．$\operatorname{div}(\operatorname{rot} X) = 0$ が成り立つことを示せ．

問 3. 1) Poincaré の補題と，rot，grad の定義を用いて，$X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$ が $\operatorname{rot} X = 0$ をみたせばある $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ が存在して $X = \operatorname{grad} f$ が成り立つことを示せ．
2) Poincaré の補題と，div，rot の定義を用いて，$X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$ が $\operatorname{div} X = 0$ をみたせばある $Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$ が存在して $X = \operatorname{rot} Y$ が成り立つことを示せ．
3) $X = y^3z^2\dfrac{\partial}{\partial x} + 3xy^2z^2\dfrac{\partial}{\partial y} + 2xy^3z\dfrac{\partial}{\partial z}$ と置く．$\operatorname{rot} X = 0$ であることを示し，$\operatorname{grad} f = X$ なる $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ を一つ求めよ．
4) $X = e^{-y-z}\dfrac{\partial}{\partial x} + e^{-x-z}\dfrac{\partial}{\partial y} + e^{-x-y}\dfrac{\partial}{\partial z}$ と置く．$\operatorname{div} X = 0$ であることを示し，$\operatorname{rot} Y = X$ なる $Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$ を一つ求めよ．

問 4. $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$ とし，$d\omega = 0$ とする．Poincaré の補題により，ある $\eta \in \Omega^{k-1}(\mathbb{R}^n)$ が存在して $\omega = d\eta$ が成り立つ．$\zeta \in \Omega^{k-1}(\mathbb{R}^n)$ について $\omega = d\zeta$ が成り立つとすると，ある $\mu \in \Omega^{k-2}(\mathbb{R}^n)$ が存在して $\eta - \zeta = d\mu$ が成り立つことを示せ．

問 5. $B^3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$ には $\mathbb{R}^3$ から自然に定まる向きを入れ，S^2 には B^3 の境界としての向きを入れる．

1) $\omega \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$ を $\omega = x^3dy \wedge dz + y^3dz \wedge dx + z^3dx \wedge dy$ により定める．$\displaystyle\int_{S^2} \omega$ を求めよ．
2) $f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3$ とする．S^2 における f の最大値と最小値を求めよ（最大値・最小値がなぜ存在するのかも考えてみよ）．

問 6. 以下に挙げる $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ 上のベクトル場 X を極座標表示に書き替えよ．より形式的に言えば，$f\colon \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ を $f(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ により定めるとき，$Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ であって $f_{*p}Y_p = X_{f(p)}$ が任意の $p \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ について成り立つものを求めよ，ということである．

1) $X = x^2\dfrac{\partial}{\partial x} + y^2\dfrac{\partial}{\partial y}$
2) $X = xy\dfrac{\partial}{\partial x} + \dfrac{\partial}{\partial y}$
3) $X = \log(x^2+y^2)\dfrac{\partial}{\partial x} + \dfrac{1}{x^2+y^2}\dfrac{\partial}{\partial y}$

問 7. $\mathbb{R}^3$ と $\mathbb{R}^2$ の通常の座標をそれぞれ (x,y,z) と (u,v) とする．また，$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ を $f(x,y,z) = (x^2+y, xz)$ により定める．

1) $\omega = -vdu + udv$ とするとき，$f^*\omega$ を求めよ．
2) $\mathbb{R}^3$ の部分集合（実際には 1 次元部分多様体）C を $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x=1,\ y^2+z^2=1\}$ により定める．C には $-z\dfrac{\partial}{\partial y} + y\dfrac{\partial}{\partial z}$ が正の向きである（C の向きと整合的になるような）向きを入れる．このとき $\displaystyle\int_C f^*\omega$ を求めよ．

問 8. M を $\mathbb{R}^m$ の境界のない k 次元部分多様体，N を $\mathbb{R}^n$ の境界のない l 次元部分多様体とする．$M \times N = \{(x,y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \mid x \in M,\ y \in N\}$ と置く．

1) $M \times N$ は $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{m+n}$ の境界のない $(k+l)$ 次元部分多様体であることを示せ．
2) $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$，$g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ とする．$(x,y) \in \mathbb{R}^{m+n}$ について $h(x,y) = f(x) + g(y)$ と置くと，$\operatorname{grad} h = \operatorname{grad} f + \operatorname{grad} g$ が成り立つことを示せ．ただし，$\mathbb{R}^m$，$\mathbb{R}^n$ の座標をそれぞれ $(x_1,\ldots,x_m)$，$(y_1,\ldots,y_n)$ とするとき，$X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^m)$ を $X + 0\dfrac{\partial}{\partial y_1} + \cdots + 0\dfrac{\partial}{\partial y_n}$ と同一視することにより $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^{m+n})$ とみなす．$\mathbb{R}^n$ 上のベクトル場についても同様に $\mathbb{R}^{m+n}$ 上のベクトル場とみなす．
3) 2) と同じ状況で，f'，g' でそれぞれ f, g の M，N への制限を表すこととする．h' を h の $M \times N$ への制限とすると $\operatorname{grad} h' = \operatorname{grad} f' + \operatorname{grad} g'$ が成り立つことを示せ．

問 9. M, N をコンパクトで境界のない[1] 多様体，$f\colon M \to N$ を微分同相写像とする．また，g を M の，h の N のそれぞれリーマン計量とする．

1) $p \in M$，$v, w \in T_pM$ の時 $(f^*h)_p(v,w) = h_{f(p)}(f_{*p}v, f_{*p}w)$ と定める．f^*h は M のリーマン計量であることを示せ（本来は f^*h がある意味で C^∞ 級であることを示す必要があるが，よく分からなければさしあたり各 $p \in M$ について $(f^*h)_p$ が T_pM の内積を定めることを示せばよい）．
2) $f^*h = g$ が成り立つとする（このとき f は (M,g) から (N,h) への等長写像と呼ばれる）．また，M, N は向き付けられていて，f は向きを保つとする．このとき $\operatorname{vol}_g M = \operatorname{vol}_h N$ が成り立つことを示せ．

（以上）

[1]更に M, N が「つながっている」（連結である）時には M, N は閉（closed）であると言う．