２０１１年度数学II（理I向け，足助担当）　演習問題 2　　　　'11/7/11（月）３限
'11/7/11 一部修正

以下では特に断らなければ K で $\mathbb{R}$ あるいは $\mathbb{C}$ を表す.

問 2.1. 以下に挙げる $\mathbb{R}^2$ の部分集合がそれぞれ $\mathbb{R}^2$ の部分線型空間であるかどうか理由と共に答えよ.

1) $W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| x_1 \in \mathbb{R} \right\}$.　　2) $W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| x_1 \in \mathbb{R} \right\}$.

3) $W_3 = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\}$.　　4) $W_4 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \middle| x_1 \in \mathbb{Z},\ x_2 \in \mathbb{R} \right\}$.

問 2.2. $V = K^3$ とする．以下に挙げる部分線型空間 W_1, W_2, W_3 の組について，$W_1 + W_2$, $W_1 + W_3$, $W_2 + W_3$, $W_1 + W_2 + W_3$ をそれぞれ求めよ．また，それぞれが直和であるかどうか調べよ.

1) $V = K^3$,　$W_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle, W_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle, W_3 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

2) $V = K^3$,　$W_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle, W_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle, W_3 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

問 2.3.　1) $f\colon K^{n+1} \to K_n[x] = \{ f \in K[x] \mid f \text{ は高々 } n \text{ 次} \}$ を

$$f \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

により定めると f は K-線型同型写像であることを示せ．また，f の逆写像を求めよ.

2) $g\colon K^{n+1} \to K_n[x]$ を

$$g \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = a_0 + (a_0 + a_1)x + (a_0 + a_1 + a_2)x^2 + \cdots + (a_0 + \cdots + a_n)x^n$$

により定めると g は K-線型同型写像であることを示せ．また，g の逆写像を求めよ.

問 2.4. $V = \{f \in K[x] \,|\, f$ は高々 n 次 $\}$ とする．$m \in \mathbb{N}$ とし，$\varphi\colon V \to K^{m+1}$ を $\varphi(f) = \begin{pmatrix} f(0) \\ f(1) \\ \vdots \\ f(m) \end{pmatrix}$ により定める．φ が線型同型写像になるような m を求めよ．また，そのとき φ が線型同型写像であることを示せ．

問 2.5. 線型写像 $\varphi : K^2 \to K^3$, $\psi : K^3 \to K^3$ をそれぞれ

$$\varphi\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+3y \\ -x+y \\ y \end{pmatrix}, \quad \psi\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+z \\ 2x+y-3z \\ x-y \end{pmatrix}$$

により定める．

1) $\psi \circ \varphi\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を具体的に計算し，表現行列を求めよ．
2) $\psi \circ \varphi$，φ，ψ の表現行列をそれぞれ A, B, C とする．A, B, C を求め，$A = CB$ が成り立つことを確かめよ．

問 2.6. $a_1, \dots, a_n \in K^n$ とし．$f\colon K^n \to K^n$ を $f(v) = \begin{pmatrix} \det(v \ a_2 \ a_3 \ \cdots \ a_n) \\ \det(a_1 \ v \ a_3 \ \cdots \ a_n) \\ \vdots \\ \det(a_1 \ \cdots \ a_{n-1} \ v) \end{pmatrix}$ により定める．f は K-線型写像であることを示し，表現行列を求めよ．

問 2.7. K^3 の部分線型空間 V_1, V_2 を $V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \ x_1, x_2 \in K \right\}$，$V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \ x_1, x_2 \in K \right\}$ により定める．

1) K^3 の K-線型変換[1] f であって，$f(V_1) \subset V_1$，$f(V_2) \subset V_2$ をみたすようなものの表現行列となりうる行列を全て求めよ．
2) K^3 の K-線型変換 f であって，$f(V_1) \subset V_2$，$V_2 \subset \operatorname{Ker} f$ をみたすようなものの表現行列となりうる行列を全て求めよ．

問 2.8. 1) $n > m$ とする．任意の線型写像 $f\colon K^n \to K^m$ について f は単射でないことを示せ．
2) $n < m$ とする．任意の線型写像 $f\colon K^n \to K^m$ について f は全射でないことを示せ．

[1] 一般に，V から V 自身への K-線型写像を V の K-線型変換（一次変換）とも呼ぶ．

問 2.9. 1) $f\colon K^8 \to K^3$ を

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 + 3x_4 + x_7 + 3x_8 \\ x_3 + 2x_4 + x_6 - x_8 \\ x_5 + 2x_6 + x_8 \end{pmatrix}$$

により定め,

$$V = \operatorname{Ker} f = \left\{ v \in K^8 \;\middle|\; f(v) = 0 \right\},$$
$$W = \operatorname{Im} f = \{ w \in K^3 \mid \exists v \in K^8,\ w = f(v) \}$$

と置く．このとき，V と W を簡潔に表し，それぞれの次元を求めよ．

2) $g\colon \mathbb{C}^5 \to \mathbb{C}^3$ を

$$g\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + \sqrt{-1}x_3 + x_5 \\ x_2 - 2x_3 \\ x_4 - 3\sqrt{-1}x_5 \end{pmatrix}$$

により定め，V，W も 1) と同様に定める．このとき，V と W を簡潔に表し，それぞれの次元を求めよ．

問 2.10. V, W を線型空間とし，U_1, U_2 を V の部分線型空間とする．また，$f_1\colon U_1 \to W$，$f_2\colon U_2 \to W$ をそれぞれ線型写像とする．

1) $V = U_1 \oplus U_2$ と直和分解されているとする．$v \in V$ の時 $v = u_1 + u_2$，但し $u_1 \in U_1$，$u_2 \in U_2$ と表して

$$f(v) = f_1(u_1) + f_2(u_2)$$

と置けば f は V から W への写像としてきちんと定まっていて（well-defined であるなどという），さらに線型写像であることを示せ.

2) 単に $V = U_1 + U_2$ であるとしても，必ずしも上の式で f をきちんと定めることができない．そのような例を挙げよ．

定義. f を $\mathbb{R}$ 上定義された実数値函数とする．f が奇函数であるとは任意の $x \in \mathbb{R}$ について $f(-x) = -f(x)$ が成り立つことをいい，また，f が偶函数であるとは任意の $x \in \mathbb{R}$ について $f(-x) = f(x)$ が成り立つことをいう.

問 2.11. $V=\mathbb{R}[x]$ とし，$W=\{f\in V\mid f$ は奇函数$\}$，$U=\{f\in V\mid f$ は偶函数$\}$ と置く.

1) W と U は共に $\mathbb{R}[x]$ の部分線型空間であることを示せ.
2) $\mathbb{R}[x]=W\oplus U$ が成り立つことを示せ.
3) $\mathbb{R}[x]=W\oplus U$ であるから，$f\in\mathbb{R}[x]$ の時，$g\in W$ と $h\in U$ がそれぞれ唯一つ存在して $f=g+h$ が成り立つ．g と h を f を用いて簡潔に表せ.
   注 : 2) の解き方によってはこちらも同時に解ける.
4) $V=\{f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}\mid f$ は C^∞ 級$\}$ として W,U を同様に定義すると $V=W\oplus U$ が成り立つことを示せ.
   注 : V の元はテーラー展開可能とは限らないので，あまり安直に考えるわけにはいかない.

問 2.12. V,W を K-線型空間，U を V の，X を W のそれぞれ K-部分線型空間とする．また，$f\colon V\to W$ を K-線型写像とする.

1) $f^{-1}(f(U))=U+\operatorname{Ker}f$ が成り立つことを示せ.
2) $f(f^{-1}(X))=X\cap\operatorname{Im}f$ が成り立つことを示せ.

問 2.13. V を K-線型空間とする．また，f を V の K-線型変換とする．$f\circ f=f$ が成り立つとき，以下が成り立つことを示せ.

1) $g=\mathrm{id}_V-f$ と置くと，$g\circ f=f\circ g=0$ が成り立つことを示せ.
2) $g\circ g=g$ が成り立つことを示せ.
3) $\operatorname{Ker}f=\operatorname{Im}g$ が成り立つことを示せ.
4) $V=\operatorname{Im}f\oplus\operatorname{Ker}f$ が成り立つことを示せ.

問 2.14. V を K-線型空間，W,U を V の K-部分線型空間とし，$V=W\oplus U$ が成り立つとする．$v\in V$ について，$v=w+u$，$w\in W$，$u\in U$ と表して $f\colon V\to W$ を $f(v)=w$，$g\colon V\to U$ を $g(v)=u$ として定める.

1) f，g は K-線型写像であることを示せ.
2) W,U は V の部分線型空間であるから，f,g は自然に V の線型変換とみなせる．このとき $f\circ f=f$，$g=\mathrm{id}_V-f$ がそれぞれ成り立つことを示せ．また，$\operatorname{Im}f=W$，$\operatorname{Ker}f=U$ がそれぞれ成り立つことを示せ.

（以上）