２００９年度数学II演習 (理I向け)　第4回 　　'09/6/1（月）４限
'09/6/2（火）４限

以下では特に断らなければ K は $\mathbb{R}$ あるいは $\mathbb{C}$ を表す.

問 4.1. 以下の方程式はいずれも $x_1, \cdots, x_n$ に関する方程式である．それぞれの解空間を $\{v \in K^n \mid v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_s v_s + d\}$ のように表せ.

1) $n = 8$.
$$\begin{cases} x_2 + 3x_4 + x_7 + 3x_8 = 0, \\ x_3 + 2x_4 + x_6 - x_8 = 0, \\ x_5 + 2x_6 + x_8 = 0. \end{cases}$$

2) $n = 5$.
$$\begin{cases} x_1 + \sqrt{-1}x_3 + x_5 = 0, \\ x_2 - 2x_3 = 0, \\ x_4 - 3\sqrt{-1}x_5 = 0. \end{cases}$$

3) $n = 8$.
$$\begin{cases} x_2 + 3x_4 + x_7 + 3x_8 = 4, \\ x_3 + 2x_4 + x_6 - x_8 = -6, \\ x_5 + 2x_6 + x_8 = 2. \end{cases}$$

4) $n = 5$.
$$\begin{cases} x_1 + \sqrt{-1}x_3 + x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + \sqrt{-1}x_4 = 0, \\ \sqrt{-1}x_2 - (3 - 2\sqrt{-1})x_3 + x_4 - \sqrt{-1}x_5 = 0. \end{cases}$$

問 4.2. 次の行列はいずれも正則である．各々の行列について，i) 逆行列を求め，ii) 基本行列の積として表し，iii) 行列式を求めよ．なお，作業の仕方によっては必ずしも i) ii) iii) の順序で解けるわけではないことに留意せよ．

1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 　2) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \\ -2 & 3 & 10 \end{pmatrix}$ 　3) $\begin{pmatrix} \sqrt{-1} & 2 - \sqrt{-1} & -1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & -4 - 3\sqrt{-1} & -1 + 4\sqrt{-1} \end{pmatrix}$

問 4.3. 以下の行列の各々について, その行列式と逆行列を求めよ.

1) $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 5 \\ -4 & 1 & -6 \\ -2 & 3 & -5 \end{pmatrix}$ 　2) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 1 & -4 & -6 \\ 3 & -2 & -5 \end{pmatrix}$ 　3) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & -5 \end{pmatrix}$

問 4.4. V, W を集合とし，$f\colon V \to W$ を写像とする.

1) 命題　$v_1, v_2 \in V$ について,「$f(v_1) = f(v_2)$ が成り立てば $v_1 = v_2$ が成り立つ」の「　」の部分を論理記号（$\forall$, $\exists$ $\Rightarrow$ 等）を用いて表せ.

2) 命題　「任意の $w \in W$ についてある $v \in V$ が存在して $w = f(v)$ が成り立つ」を論理記号を用いて表せ.

3) 「f が単射でない」ことと「f が全射でない」ことをそれぞれ論理記号を用いて表せ.

4) 次のような $f\colon V \to W$ の例を挙げよ.

   (a) f は単射であるが全射でない.

   (b) f は全射であるが単射でない.

   (c) f は単射でも全射でもない.

   (d) f は全単射である.

5) $f\colon V \to W$ であって，上の 4 つのいずれの場合にも属さないものがあればそのような例を挙げ，存在しないのであればそのことを示せ.

問 4.5. 次の連立一次方程式をクラメルの公式を用いる方法と，掃き出しを用いる方法の二通りで解け.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 7x_3 = -1, \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 2, \\ 5x_1 + 10x_2 + 16x_3 = 4 \end{cases}$$

問 4.6. $A \in M_{m,n}(K)$, $B \in M_{n,m}(K)$ とする.

1) $AB = E_m$ が成り立つが $BA = E_n$ は成り立たないような A, B の例を挙げよ.

2) $n = m$，$r < n$ とし，$\widetilde{E_r} \in M_n(K)$ を $\widetilde{E_r} = \begin{pmatrix} E_r & O_{r,n-r} \\ O_{n-r,r} & O_{n-r,n-r} \end{pmatrix}$ により定める. $AB = \widetilde{E_r}$ が成り立つが $BA = \widetilde{E_r}$ は成り立たないような A, B の例を挙げよ.

問 4.7. $\mathbb{R}[t] = \{$ 実数を係数とする t に関する多項式 $\}$ とする. $f \in \mathbb{R}[t]$ の時（f は t に関する多項式である），多項式 $\varphi(f) \in \mathbb{R}[t]$ を $\varphi(f)(t) = tf(t)$ により定める. $f(t) = 1 + t$ であれば $\varphi(f)(t) = t + t^2$ である. また, $f \in \mathbb{R}[t]$ の時, $\psi(f) \in \mathbb{R}[t]$ を $\psi(f)(t) = \dfrac{f(t) - f(0)}{t}$ により定める. $f(t) = 1 + 2t$ であれば $\psi(f)(t) = 2$ である.

1) 任意の $f \in \mathbb{R}[t]$ について $\psi(\varphi(f)) = f$ が成り立つことを示せ.

2) $\varphi(\psi(f)) = f$ は必ずしも成り立たないことを示せ.

問 4.8. $\mathbb{R}_n[t]$ を高々 n 次の，実数を係数とする t に関する多項式全体のなす集合とする. $\mathbb{R}_n[t] \subset \mathbb{R}[t]$ である. $\psi\colon \mathbb{R}_n[t] \to \mathbb{R}_n[t]$ を問 4.7 と同様に定める. $A \in M_{n+1}(\mathbb{R})$ であって，任意の $f \in \mathbb{R}_n[t]$，ただし $f(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n$，について

$$\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

により $b_0, \ldots, b_n$ を定めると，$\psi(f) = b_0 + b_1 t + \cdots + b_n t^n$ が成り立つようなものを求めよ. また，このような性質を持つ A はただ一つであることを示せ.

問 4.7 の結論は主張「$A, B \in M_n(K)$ が $AB = E_n$ を充たせば $BA = E_n$ が成り立つ」は n が有限の値でないと成り立たないことを示している．このことは直感的には次のように説明できる（数学的に厳密な説明ではない）．$\mathbb{R}[\,t\,]$ の元を係数だけ抜き出すと，例えば $1+t$ には $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $1+2t-3t^2$ には $\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$ といったように列ベクトルを対応させることができる．ただし，いくらでも次数の高い多項式が存在するから，実際にはサイズを揃えるために $\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\\\vdots\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\2\\-3\\0\\\vdots\end{pmatrix}$ などと，無限個の成分を用意しておく必要がある．ここで，φ と ψ を問 4.8 を真似て行列で表してみる．すると，サイズが無限大になってしまうので本当のところはよく分からないが，φ, ψ はそれぞれ

$$\begin{pmatrix}0 & & & & & \\ 1 & 0 & & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \\ \vdots & \vdots & & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

で表される（ような気がする）．これらの「行列」をそれぞれ A, B とすると

$$BA = \begin{pmatrix}1 & 0 & & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

なのでいかにも単位行列のようであるが，一方，

$$AB = \begin{pmatrix}0 & 0 & & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

となり，これはいかにも単位行列ではなさそうである．これらのことは後日扱う「線型空間」「線型写像」などの概念を用いれば正確に述べることができる．

（以上）