数学 II（理科 I 類）　講義資料 (2008.4.22)　訂正プリント (2008.4.23)

定義. 　1) K^n の部分集合 L であって, ある $v, c \in K^n$, $v \neq 0$, を用いて

$$L = \{x \in K^n \mid \exists t \in K, x = tv + c\}$$

と表されるものを K^n 内の直線と呼ぶ. v を L の方向ベクトルと呼ぶ.

2) K^n の部分集合 H であって, ある $a_1, \cdots, a_n, c \in K$, $(a_1, \cdots, a_n) \neq (0, \cdots, 0)$, を用いて

$$H = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n \;\middle|\; a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + c = 0 \right\}$$

と表されるものを K^n の超平面と呼ぶ. $K = \mathbb{R}$ の時は $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ を, $K = \mathbb{C}$ の時は $\begin{pmatrix} \overline{a_1} \\ \vdots \\ \overline{a_n} \end{pmatrix}$ をそれぞれ H の法線ベクトルと呼ぶ. ここで $a \in \mathbb{C}$ について, $\overline{a}$ で a の共役複素数を表す. K^3 の超平面をしばしば K^3 内の平面と呼ぶ (命題 1.9 を参照).

定義. K^n の超平面

$$H_1 = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n \;\middle|\; a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n + c_1 = 0 \right\},$$

$$H_2 = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n \;\middle|\; a_{2,1}x_1 + \cdots + a_{2,n}x_n + c_2 = 0 \right\}$$

が互いに平行であるとは, H_1, H_2 の法線ベクトルが互いに平行であることを言う.

注. この定義は K^2 の二直線が互いに平行であることの一般化となっている ($n = 2$ とすれば K^2 の二直線が互いに平行であることの定義と同値な定義が得られる).

補題. K^n の超平面 H_1, H_2 が互いに平行であることと, $(a_{2,1}, \cdots, a_{2,n}) = \lambda(a_{1,1}, \cdots, a_{1,n})$ がある 0 でない K の元 λ について成り立つことは同値である.

証明. H_1, H_2 が平行であることは $K = \mathbb{R}$ であれば $\begin{pmatrix} a_{2,1} \\ \vdots \\ a_{2,n} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ \vdots \\ a_{1,n} \end{pmatrix}$ がある $\lambda \neq 0 \in \mathbb{R}$ について成り立つことと同値であるし, $K = \mathbb{C}$ であれば $\begin{pmatrix} \overline{a_{2,1}} \\ \vdots \\ \overline{a_{2,n}} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \overline{a_{1,1}} \\ \vdots \\ \overline{a_{1,n}} \end{pmatrix}$ がある $\lambda \neq 0 \in \mathbb{C}$ について成り立つことと同値である. 前者は $(a_{2,1}, \cdots, a_{2,n}) = \lambda(a_{1,1}, \cdots, a_{1,n})$ と, 後者は $(a_{2,1}, \cdots, a_{2,n}) = \overline{\lambda}(a_{1,1}, \cdots, a_{1,n})$ と同値である. □