以下では特に断らなければ K で $\mathbb{R}$ あるいは $\mathbb{C}$ を表す．また，線型空間は全て有限次元であると仮定する．

問 11.1. 次の行列の（全ての）固有値とその重複度を求めよ．また，それぞれの固有値に属する固有空間を求めよ．

1) $\begin{pmatrix} -3 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \\ -8 & 6 & 8 \end{pmatrix}$　2) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 12 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$　3) $\begin{pmatrix} 55 & 44 & 33 \\ 27 & -12 & 57 \\ -58 & 16 & -76 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & 9\sqrt{2}-1 & 7\sqrt{2}-3 \\ 0 & -3\sqrt{2}+1 & -3\sqrt{2}+3 \\ 0 & \sqrt{2}-1 & \sqrt{2}-3 \end{pmatrix}$　5) $\begin{pmatrix} 0 & -2 & -2i \\ 1-i & 1-i & 1-i \\ 1-i & 1+i & 1+i \end{pmatrix}$ ただし $i=\sqrt{-1}$

6) $\begin{pmatrix} 15 & 4 & 0 & -2 \\ -29 & -7 & -1 & 5 \\ 10 & 3 & 1 & -1 \\ 23 & 7 & -1 & -1 \end{pmatrix}$　7) $\begin{pmatrix} 2 & -5 & 39 & 5 & -2 \\ 3 & 13 & -42 & 9 & -3 \\ 0 & 2 & -10 & 0 & 0 \\ -1 & -4 & 11 & -4 & 1 \\ 3 & 3 & 8 & 9 & -3 \end{pmatrix}$

問 11.2. $A \in M_n(\mathbb{C})$ とする．ある $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ が存在して $P^{-1}AP$ が対角行列であるとする（A が P により対角化可能であるとする）．$Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ とし，$A_Q = Q^{-1}AQ$ と定めると，ある $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ の元 R が存在して $R^{-1}A_QR$ は対角行列であることを示せ（A_Q は R により対角化可能であることを示せ）．

問 11.3. $t \in \mathbb{C}$ とし，$A_t = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする．

1) A_t の固有多項式を求めよ．また,（全ての）固有値とその重複度を求めよ．
2) A_t が（$\mathbb{C}$ 上）対角化可能なのは $t=0$ の時，その時のみであることを示せ．
3) $t \neq 0$ とすると A_t と A_0 は相似ではないことを示せ．つまり，$P^{-1}A_0P = A_t$ をみたすような $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ は存在しないことを示せ.（一方 A_0 以外の A_t は実は全て A_1 に相似である.）

問 11.4. 以下の命題のそれぞれについて，それが正しければ証明し，正しくなければ反例を挙げよ．

1) $A \in M_3(\mathbb{R})$ とする．A が正則でなければ対角化不可能である．
2) $A \in M_3(\mathbb{C})$ とする．A の固有値が全て異なるとすると A は適当な $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$ を用いて対角化可能である．つまり $P^{-1}AP$ が対角行列であるような $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$ が存在する．
3) $A, B \in M_3(\mathbb{C})$ とする．A, B が共に対角化不可能であればその積 AB も対角化不可能である．

問 11.5. $V = \{$ 数列 $\{a_i\}_{i=0}^{\infty} \mid a_i \in \mathbb{C}\}$ とし，その部分空間

$$W = \{\{a_i\}_{i=0}^{\infty} \in V \mid a_{i+3} + 3a_{i+2} - 4a_{i+1} - 12a_i = 0\}$$

を考える．また, W の元 $\{a_0, a_1, \cdots\}$ に対し，項をひとつずらした数列 $\{a_1, a_2, \cdots\}$ を対応させる線型写像を $D\colon W \to W$ とする．

1) W の基底を一組求めよ（W は有限次元である）．
2) D の固有値と固有ベクトルを求めよ．
3) W の元 $a = \{a_i\}_{i=0}^{\infty}$，$b = \{b_i\}_{i=0}^{\infty}$ に対して

$$\langle a, b\rangle = \overline{a_0}b_0 + \overline{a_1}b_1 + \overline{a_2}b_2$$

   と置くと $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は W のエルミート計量であることを示せ．以下では W の計量としてこの計量を考える．
4) 1) で求めた W の基底をグラムーシュミットの方法で正規直交化せよ．
5) $U = \{\{a_i\}_{i=0}^{\infty} \in V \mid a_{i+2} + 5a_{i+1} + 6a_i = 0\}$ とする．$U \subset W$ であることを示し，U の W における直交補空間を求めよ．

問 11.6. $V = \mathbb{R}_5[x]$ とし，$f, g \in V$ に対して

$$\langle f, g\rangle = f(0)g(0) + \frac{df}{dx}(0)\frac{dg}{dx}(0) + \frac{d^2f}{dx^2}\frac{d^2g}{dx^2} + \cdots + \frac{d^5f}{dx^5}(0)\frac{d^5g}{dx^5}(0)$$

と置く．

1) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は V の（ユークリッド）計量であることを示せ．
2) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ に関する V の正規直交基底を一組求めよ．
3) $\varphi\colon V \to V$ を $\varphi(f)(x) = \dfrac{df}{dx}(x)$ により定める．2) で求めた基底に関する φ の表現行列を求めよ．
4) φ の随伴写像 $\varphi^*\colon V \to V$ を求めよ．

問 11.7. V を計量線型空間とし，$f\colon V \to V$ を線型写像とする．f を（$\mathbb{C}$ 上）対角可能であるとする．このとき f の随伴写像 f^* も（$\mathbb{C}$ 上）対角化可能であることを示せ．

問 11.8. V を計量線型空間とし，$W \subset V$ を部分線型空間とする．また，$U \subset W$ を部分線型空間とする．

1) $U_W^{\perp}$ を W における U の直交補空間，$U^{\perp}$ を V における U の直交補空間とすると $U_W^{\perp}$ は $U^{\perp}$ の部分線型空間であることを示せ．
2) $U^{\perp} = U_W^{\perp} \oplus W^{\perp}$ であることを示せ．ここで $W^{\perp}$ は W の V における直交補空間である．

（以上）