２００８年度数学II演習（理I向け，足助担当）　第９回　　　　’08/11/11（火）４限

以下では特に断らなければ K で $\mathbb{R}$ あるいは $\mathbb{C}$ を表す.

問 9.1 (問 8.2 も参照のこと). 次のベクトルの組が生成する V の部分線型空間を W とする．W の（K 上の）基底を求めよ．また，もし $W \neq V$ である時には求めた W の基底の拡大（延長）となっている V の基底を求めよ.

1) $V = K^3$, $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2) $V = K^3$, $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3) $V = K^4$, $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

4) $K = \mathbb{C}$, $V = \mathbb{C}^4$,

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{-1} \\ 0 \\ \sqrt{-1} \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, v_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

問 9.2. 以下のように線型空間 V, W と，V から W への線型写像 f を与える．このとき適当に V, W の基底を選んで f を行列表示せよ．また，f が線型同型写像であるかどうか判定し，線型同型写像である場合には逆写像を求めよ.

1) $V = W = M_2(K)$ とし $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathrm{GL}_2(K)$ を一つ固定する．
f は $f(X) = AXA^{-1}$ により定める.

2) $V = W = M_2(K)$ とし $A = (a_{ij})_{i,j} \in M_2(K)$ を一つ固定する．
f は $f(X) = AX - XA$ により定める.

3) $V = K_2[t]$, $W = K$ とする．f は $f(\varphi) = \varphi(0)$ により定める.

4) $V = K_2[t]$, $W = K^3$ とする．f は

$$f(\varphi) = \begin{pmatrix} \varphi(0) \\ \varphi'(0) \\ \frac{1}{2}\varphi''(0) \end{pmatrix}$$

により定める.

問 9.3 (問 8.6 も参照のこと). V, W を K-線型空間，$f\colon V \to W$ を K-線型同型写像とする．$\{v_1, \cdots, v_n\}$ が V の基底であることと，$\{f(v_1), \cdots, f(v_n)\}$ が W の基底であることは同値であることを示せ.

問 9.4. $V = \mathbb{R}_3[\,t\,]$ とし，$\mathscr{E} = \{1, t, t^2, t^3\}$ とする.

1) $\mathscr{E}$ は V の基底であることを示せ.
2) $\mathscr{F} = \{t^3,\ t^3+t^2,\ t^3+t^2+t,\ t^3+t^2+t+1\}$，$\mathscr{G} = \{(t+1)^3,\ (t+1)^2,\ t+1,\ t\}$ とすると $\mathscr{F}$，$\mathscr{G}$ は共に V の基底であることを示せ．また, $\mathscr{E}$ から $\mathscr{F}$, $\mathscr{F}$ から $\mathscr{G}$, $\mathscr{E}$ から $\mathscr{G}$ への基底の変換行列をそれぞれ求めよ.

問 9.5. $A \in M_n(K)$ とし, $f\colon K^n \to K^n$ を $f(v) = Av$ により定める．$v \in K^n$，$v \neq 0$，について $f(v) = \lambda v$ が成り立つとすると $\det(\lambda E_n - A) = 0$ であることを示せ.
ヒント：$f(v) = Av$, $\lambda v = \lambda E_n v$ だから, $f(v) = \lambda v$ であれば $Av = \lambda E_n v$ である．従って $(\lambda E_n - A)v = 0$ が成り立つ.

問 9.6. $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ とし, $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を $f(v) = Av$ により定める.

1) $Av_1 = -v_1$ を充たす $v_1 \neq 0$ を一つ求めよ.
2) $Av_2 = 2v_2$ を充たす $v_2 \neq 0$ を一つ求めよ.
3) $Av_3 = 3v_3$ を充たす $v_3 \neq 0$ を一つ求めよ.
4) $\{v_1, v_2, v_3\}$ は $\mathbb{R}^3$ の基底であることを示せ.
5) 上で求めた基底に関する f の表現行列を求めよ.

問 9.7 (問 4.6 も参照のこと). $\mathbb{R}[\,t\,] = \{$ 実数を係数とする t に関する多項式 $\}$ とする．$f \in \mathbb{R}[\,t\,]$ の時（f は t に関する多項式である）, 多項式 $\varphi(f) \in \mathbb{R}[\,t\,]$ を $\varphi(f)(t) = tf(t)$ により定める．$f(t) = 1+t$ であれば $\varphi(f)(t) = t+t^2$ である．また $f \in \mathbb{R}[\,t\,]$ の時 $\psi(f) \in \mathbb{R}[\,t\,]$ を $\psi(f)(t) = \dfrac{f(t) - f(0)}{t}$ により定める．$f(t) = 1 + 2t$ であれば $\psi(f)(t) = 2$ である.

1) $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_{\mathbb{R}[\,t\,]}$ が成り立つことを示せ.
2) ψ，φ はいずれも線型同型写像ではないことを示せ.

※　第４回配布の資料では「無限に大きい行列」を用いて数学的には厳密ではない説明をしたが，問 9.7 は主張

「$\varphi, \psi\colon V \to V$ について $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_V$ が成り立てば $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_V$ が成り立つ」

は V が有限次元でないと必ずしも正しくない，という数学的に厳密な命題の証明になっている（なお，V が有限次元であるならば上の主張は正しい）.

（以上）