２００８年度数学 II 演習（理 I 向け）　第７回　　　　　　'08/10/14（火）４限

以下では特に断らなければ K で $\mathbb{R}$ あるいは $\mathbb{C}$ を表す.

$\mathbb{R}_n[x]$ で高々 n 次の x に関する多項式全体のなす（実）線型空間を表す.

$\mathbb{R}_n[x] = \{a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \mid a_0, \cdots, a_n \in \mathbb{R}\}$ である.

問 7.1. 1) $f, g \in \mathbb{R}_n[x]$ とし，$f(x) = a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$，$g(x) = b_0+b_1x+\cdots+b_nx^n$ とする．$(f+g)(x) = c_0 + c_1x + \cdots + c_nx^n$ とすれば $c_k = a_k + b_k$ であることを示せ．また，$\lambda \in \mathbb{R}$ の時，$(\lambda f)(x) = d_0+d_1x+\cdots+d_nx^n$ とすると $d_k = \lambda a_k$ であることを示せ.

2) $f\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}_n[x]$ を

$$f\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$$

により定めると f は線型同型写像であることを示せ.

3) $g\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}_n[x]$ を

$$g\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = a_0 + a_1 + a_1x + \cdots + a_nx^n$$

により定めると g は線型同型写像であることを示せ.

4) $f \in \mathbb{R}_n[x]$ に対して $\varphi(f) \in \mathbb{R}_{2n}[x]$ を

$$\varphi(f)(x) = f(x^2)$$

により定める．φ を写像 $\varphi\colon \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_{2n}[x]$ とみなしたとき，φ は線型写像であることを示せ.

5) 4) で定めた φ は単射であることを示せ.

6) φ を 4) で定めた写像とする．線型写像 $\psi\colon \mathbb{R}_{2n}[x] \to \mathbb{R}_n[x]$ であって $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_{\mathbb{R}_n[x]}$ が成り立つようなものを一つ求めよ.

問 7.2. 1) $n > m$ とすると，任意の線型写像 $f\colon K^n \to K^m$ について $\operatorname{Ker} f \neq \{0\}$ であることを示せ．すなわち f は単射でない.

2) $n < m$ とすると，任意の線型写像 $f\colon K^n \to K^m$ について $\operatorname{Im} f \neq K^m$ であることを示せ．すなわち f は全射でない.

問 7.3. 1) $f\colon K^8 \to K^3$ を

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 + 3x_4 + x_7 + 3x_8 \\ x_3 + 2x_4 + x_6 - x_8 \\ x_5 + 2x_6 + x_8 \end{pmatrix}$$

により定める．$\operatorname{Ker} f$ および $\operatorname{Im} f$ を決定し，それぞれの次元を求めよ．

2) $g\colon \mathbb{C}^5 \to \mathbb{C}^3$ を

$$g\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + \sqrt{-1}x_3 + x_5 \\ x_2 - 2x_3 \\ x_4 - 3\sqrt{-1}x_5 \end{pmatrix}$$

により定める．$\operatorname{Ker} g$ および $\operatorname{Im} g$ を決定し，それぞれの次元を求めよ．

問 7.4. $f\colon K^n \to K^n$ が $A \in M_n(K)$ で表されるとする．

1) $A^2 = A$ であることと，$f \circ f = f$ であることは同値であることを示せ．
2) $A^2 = A$ であれば $K^n = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$ であることを示せ．

問 7.5. $A \in M_n(K)$ とし，列ベクトルを用いて $A = (a_1 \ \cdots \ a_n)$ と表す．また，$f\colon K^n \to K^n$ を $f(v) = Av$ により定める．

1) $v \in K^n$ の時 $A_i = (a_1 \ \cdots \ a_{i-1} \ v \ a_{i+1} \ \cdots a_n)$ と置く．$g\colon K^n \to K^n$ を

$$g(v) = \begin{pmatrix} \det A_1 \\ \det A_2 \\ \vdots \\ \det A_n \end{pmatrix}$$

により定めると，g は線型写像であって，その表現行列は A の余因子行列（ここでは $\widetilde{A}$ で表す）であることを示せ．

2) $g \circ f$ および $f \circ g$ を求めよ．
3) $n = 3$ の時に $\widetilde{A}$ の余因子行列を求めよ．

問 7.6. V, W を線型空間とし，U_1, U_2 を V の部分線型空間とする．また，$f_1\colon U_1 \to W$，$f_2\colon U_2 \to W$ をそれぞれ線型写像とする．

1) $V = U_1 \oplus U_2$ と直和分解されているとする．$v \in V$ の時 $v = u_1 + u_2$，但し $u_1 \in U_1$，$u_2 \in U_2$ と表して

$$f(v) = f_1(u_1) + f_2(u_2)$$

と置けば $f\colon V \to W$ は線型写像であることを示せ．

2) 単に $V = U_1 + U_2$ であるとしても，必ずしも上の式で f をきちんと定めることができない．このような例を挙げよ．

（以上）