２００８年度数学 II 演習（理 I 向け）　第５回　　　　　　'08/7/1（火）４限

以下では特に断らなければ K は $\mathbb{R}$ あるいは $\mathbb{C}$ を表す.

問 5.1. 以下の行列の各々について, その行列式と逆行列を求めよ.

$$1)\ \begin{pmatrix} 5 & 2 & 5 \\ -4 & 1 & -6 \\ -2 & 3 & -5 \end{pmatrix} \qquad 2)\ \begin{pmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 1 & -4 & -6 \\ 3 & -2 & -5 \end{pmatrix} \qquad 3)\ \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & -5 \end{pmatrix}$$

問 5.2. 次の連立一次方程式をクラメルの公式を用いる方法と，掃き出しを用いる方法の二通りで解け.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 7x_3 = -1, \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 2, \\ 5x_1 + 10x_2 + 16x_3 = 4 \end{cases}$$

問 5.3.
1) 上三角行列（下三角行列）同士の和・積は再び上三角行列（下三角行列）であることを示せ.
2) 正則な上三角行列（下三角行列）の逆行列は上三角行列（下三角行列）であることを示せ.

問 5.4. $A \in M_n(K)$ を $A = \begin{pmatrix} A' & b \\ c & d \end{pmatrix}$ と $A' \in M_{n-1}(K)$ であるように区分けする．$A' \in \mathrm{GL}_{n-1}(K)$ のとき,

$$L = \begin{pmatrix} A' & 0 \\ c & d' \end{pmatrix},\ U = \begin{pmatrix} E_{n-1} & b' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

が $A = LU$ を充たすように b'，d' を定めよ.

問 5.5. $A \in M_n(K)$ とする．A の第 1 行から第 k 行，第 1 列から第 k 列までを取り出して得られる行列を $A_k \in M_k(K)$ とする（A_k を第 k 主座小行列（k-th principal minor）と呼ぶ）．もし $A_1, \cdots, A_n (= A)$ が全て正則であるとすると，対角成分が全て 1 であるような上三角行列 $U \in \mathrm{GL}_n(K)$ と，正則な下三角行列 $L \in \mathrm{GL}_n(K)$ がただ一組存在して $A = LU$ が成り立つことを以下の方針で示せ．これを LU 分解と呼ぶ.
存在の証明.

1) $n = 1$ の時は $U = (1)$, $L = A$ とすればよい.
2) n 次以下の正則行列について分解が存在したとする．$A = \begin{pmatrix} A' & b \\ c & d \end{pmatrix}$ と $A' \in M_n(K)$ であるように区分けする．$A' = A_n$ であるから仮定から A' は正則である．前問を用いて $A = L_1U_1$ とすると，L_1 の第 n 主座小行列は帰納法の仮定から LU 分解

可能である（証明は必要である）．このことを用いてまず L_1 が LU 分解可能であることを示し，それから A 自身が LU 分解可能であることを示せ．

一意性の証明．$A = LU = L'U'$ を共に LU 分解とする．このとき，$L'^{-1}L = U'U^{-1}$ が成り立つ．両辺が共に E_n に等しいことを $L'^{-1}L$, $U'U^{-1}$ の形に着目して示せ．

$A \in \mathrm{GL}_n(K)$ を問 5.5 の仮定を充たす行列とし，$A = LU$ を LU 分解とする．このとき，$v \in K^n$ に関する方程式 $Av = w$ は $Uv = L^{-1}w$ と同値である．L は下三角行列であるから L^{-1} は比較的容易に求まる．一方，$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ とすると，

$$Uv = \begin{pmatrix} x_1 + u_{12}x_2 + u_{13}x_3 + \cdots + u_{1n}x_n \\ x_2 + u_{23}x_3 + \cdots + u_{2n}x_n \\ \ddots \\ x_n \end{pmatrix}$$

であるから，$Uv = L^{-1}w$ は x_n から順番に値を定めていくことで機械的に解くことができる．

問 5.6 (ヴァンデルモンド（Vandermonde）の行列式)．$n \geq 2$ とする．

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ {x_1}^2 & {x_2}^2 & \cdots & {x_n}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ {x_1}^{n-1} & {x_2}^{n-1} & \cdots & {x_n}^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)$$

が成り立つことを示せ．ここで，$\prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$ は $1 \leq i < j \leq n$ なる (i, j) の組全てについて $(x_j - x_i)$ を考えてその積を取ることを意味する．この行列式を $x_1, \cdots, x_n$ の差積と呼ぶ．

問 5.7. $\Delta(x_1, \cdots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$ を $x_1, \cdots, x_n$ の差積とする（$n \geq 2$ とする）．$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ を相異なる K の元とし，

$$f_k(x) = \frac{\Delta(\alpha_1, \cdots, \alpha_{k-1}, x, \alpha_{k+1}, \cdots, \alpha_n)}{\Delta(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)}$$

と置く．

1) f_k は $(n-1)$ 次多項式であって，$f_k(\alpha_j) = \begin{cases} 1, & j = k, \\ 0, & j \neq k \end{cases}$ が成り立つことを示せ．
2) $f_1 + \cdots + f_n = 1$ が成り立つことを示せ．ここで右辺は恒等的に 1 であるような函数を表す．
3) $1 \leq l \leq n-1$ の時 ${\alpha_1}^l f_1(x) + \cdots + {\alpha_n}^l f_n(x) = x^l$ が成り立つことを示せ（任意の $a \in K$ について $a^0 = 1$ と定め，また，$x^0 = 1$ と定めれば 2) が得られる）．

2) 3) のヒント：例えば直接計算して示すことも可能である．この際には左辺を $(n+1)$ 次行列の行列式の形に書き直すと計算がかなり楽になる．あるいは，次の問 5.8 を用いることもできる．ただし，この場合には問 5.8 を解くのに問 5.7 の結果は使えない．

問 5.8. f を K の元を係数とする $(n-1)$ 次多項式とする．f が n 個の相異なる K の元 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ について $f(\alpha_1) = \cdots = f(\alpha_n) = 0$ を充たせば $f = 0$ であることを示せ．

問 5.9. 以下の主張を確かめよ．

1) K は通常の和・積に関して K-線型空間である．
2) $M_{m,n}(K)$ は行列の和と K の元との積により K-線型空間である．
3) $K[\,t\,]$ で t を変数とする K 係数の多項式全体を表す．

$$K[\,t\,] = \{a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n \mid a_0, \cdots, a_n \in K\}$$

である（n は元ごとに異なる）．また，$K_n[\,t\,]$ で t を変数とする高々n 次の K 係数の多項式全体を表す．

$$K_n[\,t\,] = \{a_0 + a_1 t + \cdots + a_m t^m \mid a_0, \cdots, a_n \in K,\ m \leq n\}$$

である．$K[\,t\,]$，$K_n[\,t\,]$ は共に多項式の和・実数倍に関して K-線型空間である．
※ $K[\,t\,]$ は一般的な記号であるが，$K_n[\,t\,]$ はそうではないので注意せよ．

4) $V = \{\{a_n\}_{n=1,2,\cdots} \mid a_n \in K,\ a_{n+2} + 3a_{n+1} + 2a_n = 0\}$ とする．$a = \{a_n\}, b = \{b_n\} \in V$ の時，$a + b \in V$ を $a + b = \{c_n\}$，ただし $c_n = a_n + b_n$，と定め，$\lambda \in K$ の時 $\lambda a \in V$ を $\lambda a = \{\lambda a_n\}$ と定めれば V は K-線型空間である．

5) n を固定し，$W = \left\{a_n \frac{d^n}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{d}{dt} + a_0 \,\middle|\, a_0, \cdots, a_n \in \mathbb{R}\right\}$ とする．ここで，$w = a_n \frac{d^n}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{d}{dt} + a_0$ は，$f \in \mathbb{R}[\,t\,]$ に対して

$$w(f) = a_n \frac{d^n f}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1} f}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{df}{dt} + a_0 f$$

と置くことで定められた写像である．$f, g \in \mathbb{R}[\,t\,]$, $\lambda \in \mathbb{R}$ であれば $w(f+g) = w(f) + w(g)$, $w(\lambda f) = \lambda w(f)$ が成り立つ．即ち，$w\colon \mathbb{R}[\,t\,] \to \mathbb{R}[\,t\,]$ は $\mathbb{R}$-線型写像である．

$w = a_n \frac{d^n}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{d}{dt} + a_0$，$w' = b_n \frac{d^n}{dt^n} + b_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \cdots + b_1 \frac{d}{dt} + b_0$ をそれぞれ W の元とする．

$$w + w' = (a_n + b_n)\frac{d^n}{dt^n} + \cdots + (a_1 + b_1)\frac{d}{dt} + (a_0 + b_0)$$

と定め，また，$\lambda \in \mathbb{R}$ に対して

$$\lambda w = (\lambda a_n)\frac{d^n}{dt^n} + (\lambda a_{n-1})\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \cdots + (\lambda a_1)\frac{d}{dt} + (\lambda a_0)$$

と定めると，$f \in \mathbb{R}[\,t\,]$ について $(w + w')(f) = w(f) + w'(f)$, $(\lambda w)(f) = \lambda w(f)$ がそれぞれ成り立つ．このように定めた演算により W は $\mathbb{R}$-線型空間である．

ヒント：W の元の「係数」に着目すれば演算は $\mathbb{R}^{n+1}$ のものと同じである．

6) $V=\mathbb{C}$ とする．$v, v' \in V$ の時，$v+v'$ を複素数の和により定め，$\lambda \in \mathbb{R}$ の時 λv を複素数の積により定めると $\mathbb{C}$ は $\mathbb{R}$-線型空間とみなせる．$v=1$，$v'=\sqrt{-1}$ とすると，通常の意味では $v'=\sqrt{-1}v$ であるが，この等式は $V=\mathbb{C}$ を $\mathbb{R}$-線型空間と考えているときには右辺が定義できない（計算できない）ので意味を持たない．
※ 後半の主張は示すというより，納得できればよい．

問 5.10. $V=K^3$ とする．以下に挙げる部分線型空間 W_1, W_2, W_3 の組について，W_1+W_2, W_1+W_3, W_2+W_3, $W_1+W_2+W_3$ をそれぞれ求めよ．

1) $V=K^3$，$W_1=\left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \right\rangle, W_2=\left\langle \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle, W_3=\left\langle \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \right\rangle$

2) $V=K^3$，$W_1=\left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \right\rangle, W_2=\left\langle \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} \right\rangle, W_3=\left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle$

問 5.11. $V=K[x]$ とする．以下に挙げる部分線型空間 W_1, W_2 の組について，$W_1 \cap W_2$, W_1+W_2 をそれぞれ求めよ．

1) $W_1=\langle x+1\rangle, W_2=\langle x-2\rangle$.
2) $W_1=\langle x-1\rangle, W_2=\langle x^2-3x+2\rangle$.
3) $W_1=\langle x^2-3x+2\rangle, W_2=\langle x^2-4\rangle$.

問 5.12. 以下に挙げる $\mathbb{R}^2$ の部分集合がそれぞれ $\mathbb{R}^2$ の部分線型空間であるかどうか理由と共に答えよ．

1) $W_1=\left\{ \begin{pmatrix}x_1\\0\end{pmatrix} \;\middle|\; x_1 \in \mathbb{R} \right\}$ 2) $W_2=\left\{ \begin{pmatrix}x_1\\1\end{pmatrix} \;\middle|\; x_1 \in \mathbb{R} \right\}$ 3) $W_3=\left\{ \begin{pmatrix}t\\t^2\end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}$

問 5.13. $\mathbb{R}^2$ の部分線型空間 W を $W=\left\{ \begin{pmatrix}x_1\\0\end{pmatrix} \;\middle|\; x_1 \in \mathbb{R} \right\}$ により定める．$\mathbb{R}^2$ の部分線型空間 U_1, U_2 であって, $\mathbb{R}^2=W\oplus U_1=W\oplus U_2$ かつ $U_1 \neq U_2$ であるようなものを一組挙げよ．

問 5.14. V を K-線型空間とし，W_1, W_2, W_3 を V の部分線型空間とする．

1) $(W_1+W_2)\cap W_3 \supset (W_1\cap W_3+W_2\cap W_3)$ が成り立つことを示せ．また，等号が成り立たない例を挙げよ．
2) $((W_1\cap W_2)+W_3) \subset (W_1+W_3)\cap(W_2+W_3)$ が成り立つことを示せ．また，等号が成り立たない例を挙げよ．

（以上）