２００８年度数学II演習（理I向け）　第２回　　　　　　'08/5/1（木）４限

定義 2.1. $z \in \mathbb{C}$ の時,

$$e^z = 1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3!}z^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

と定める. ただし, $\frac{z^0}{0!} = 1$ とみなす.

本当は級数が収束することを示さないと上の定義は意味をなさないが, これは数学Iで扱うことになっているのでここでは収束は認める.

さらに, 次の定理も認める.

定理 2.2. $x \in \mathbb{R}$ の時 $e^{\sqrt{-1}x} = \cos x + \sqrt{-1}\sin x$ が成り立つ.

また, $z, w \in \mathbb{C}$ の時 $e^{z+w} = e^z e^w$ が成り立つ（指数法則）も認めることにする.

問 2.3. $z \in \mathbb{C}$ とする.

1) $|e^z| = e^{\mathrm{re}\, z}$ が成り立つことを示せ. 特に, 常に $e^z \neq 0$ が成り立つ.
2) $n \in \mathbb{Z}$ であれば $e^{z+2\pi\sqrt{-1}n} = e^z$ が成り立つことを示せ.
3) $\frac{1}{e^z} = e^{-z}$ であることを示せ.

問 2.4. $z \in \mathbb{C}$ とする. $f_z \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ に対して

$$f_z(x) = \begin{pmatrix} \mathrm{re}\, z(x_1 + \sqrt{-1}x_2) \\ \mathrm{im}\, z(x_1 + \sqrt{-1}x_2) \end{pmatrix}$$

と置くことにより定める. ここで, $z(x_1 + \sqrt{-1}x_2)$ は複素数としての積である.

1) 任意の $x \in \mathbb{R}^2$ について, $f_z(x) = A_z x$ が成り立つような $A_z \in M_2(\mathbb{R})$ がただ一つ存在する. A_z を z を用いて表せ.
2) $z \neq 0$ であれば 1) で得られる行列 A は逆行列を持ち, しかもそれはある $w \in \mathbb{C}$ を用いて A_w と表せることを示せ.

問 2.5. 問 2.4 で得られる写像 f_z は

a) $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2$, $f_z(x_1 + x_2) = f_z(x_1) + f_z(x_2)$,
b) $\forall x \in \mathbb{R}^2$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $f_z(\lambda x) = \lambda f_z(x)$,

という性質を持つことを示せ.

問 2.5 の二つの性質を持つ写像を線型写像という. 線型写像はこの講義・演習での主題の一つである.

行列の積に関しては，たとえば $(AB)C = A(BC)$, $A(B+C) = AB + AC$ などが成り立ち，数（実数や複素数）に関する和や積と同様な性質が多く成り立つが，一般には $XY = YX$ が成り立たなかったり，$A, B \neq O$ であっても $AB = O$ となったりする．言い換えれば，$AB = O$ だからといって $A = O$ または $B = O$ とは一般には**言えない**．分かっているようでもしばしば間違えてしまうので注意を要する．

問 2.6. X，Y を n 次行列とする．

1) $(X+Y)^2 = X^2 + 2XY + Y^2$ が成り立つための X, Y に関する必要十分条件は $XY = YX$ であることを示せ．
2) 一般には，上の条件 $XY = YX$ は成り立たないことを示せ．また, そのとき確かに $(X+Y)^2 \neq X^2 + 2XY + Y^2$ であることを示せ．
3) 条件 $XY = YX$ が成り立つような X, Y の例をいくつか挙げよ．そのうちの一つについて, $(X+Y)^2 = X^2 + 2XY + Y^2$ が成り立っていることを示せ．

問 2.7. [1] 以下の 1) から 10) の行列に適宜左右の基本変形を繰り返して

$$\begin{pmatrix} E_r & O_{r,n-r} \\ O_{m-r,r} & O_{m-r,n-r} \end{pmatrix}$$

の形にせよ（必ず出来る．しかも結果は一意的に定まる．これらの事実は後日講義で示す）．また，正方行列 A がもし E_r の形に変形できるときには（つまり，上の行列で $m = n = r$ となるとき）, 実は左基本変形のみを用いて A を E_r に変形出来るので，そのような変形を示せ．

1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$　2) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$　3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -3 \\ 6 & -4 & 3 \end{pmatrix}$　5) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -3 & -3 \\ 6 & -4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$　6) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

7) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$　8) $\begin{pmatrix} t & s \\ 0 & u \end{pmatrix}$ 但し $t, s, u \in \mathbb{R}$

9) $\begin{pmatrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$　10) $\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -\sqrt{-1} & 0 & 1 \end{pmatrix}$

後半のヒント: $T, S \in \mathrm{GL}_r(K)$ について $TAS = E_r$ が成り立つとすれば $STA = S(TAS)S^{-1} = SE_rS^{-1} = E_r$ が成り立つ.

$A \in M_{m,n}(K)$ の元を問 2.7 のように変形したときの r を A の階数（rank）と呼ぶ.

（以上）

[1] 3) 7) は笠原晧司著 線形代数学（サイエンス社）より改題