問１． $X \in M_n(\mathbb{C})$ に対して

$$\exp X = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{n!} X^n = E_n + X + \frac{1}{2} X^2 + \frac{1}{3!} X^3 + \cdots$$

と定める．exp を（行列の）指数写像と呼ぶ．$\exp X$ を X の指数行列と呼ぶこともある．以下では級数の収束は大らかに考えてもよい（実際には現時点での知識で証明できることである）．

1) $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ が $AB = BA$ をみたせば $\exp(A+B) = \exp A \exp B = \exp B \exp A$ であることを示せ.
2) $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ であって, $\exp(A+B)$, $\exp A \exp B$, $\exp B \exp A$ のどの二つも等しくないものの例を挙げよ.
3) 任意の $X \in M_n(\mathbb{C})$ について $\exp X$ は正則行列であることを示せ.
   ヒント：$\exp O_n = E_n$ である.
4) $A \in M_n(\mathbb{C})$ とする．$\exp {}^t A = {}^t(\exp A)$, $\overline{\exp A} = \exp \overline{A}$ が成り立つことを示せ.
5) $P \in \mathrm{GL}(n; \mathbb{C})$, $A \in M_n(\mathbb{C})$ であれば $\exp(P^{-1}AP) = P^{-1}(\exp A)P$ が成り立つことを示せ.
6) $n > 1$ のとき, $N_n \in M_n(\mathbb{C})$ を $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & & 0 & 0 \end{pmatrix}$ とする.
   $n = 1$ のときには $N_1 = (0)$ とする．$\alpha \in \mathbb{C}$ のとき, $J_n(\alpha) = \alpha E_n + N_n$ と定める．$J_n(\alpha)$ を n 次の Jordan block と呼ぶ．t を変数とし, $\exp tJ_n$ を求めよ.
7) $A \in M_n(\mathbb{C})$ とし, t を変数とする．$\dfrac{d}{dt} \exp tA = A \exp tA = (\exp tA)A$ が成り立つことを示せ．（項別微分が可能であることはここでは用いてよい）．
8) $X \colon \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{C})$ を行列に値を持つ函数とする．$\dfrac{d}{dt} \exp X(t)$ と $X(0) \exp X(t)$, $(\exp X(t))X(0)$ のうちどの２つも等しくないような X の例を挙げよ.

問２． $A \in M_n(\mathbb{C})$ とし, $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ をその相異なるすべての固有値, p_i を α_i の重複度とする．すると, $\exp A$ の相異なる固有値は $e^{\alpha_1}, \cdots, e^{\alpha_r}$ であって, e^{α_i} の重複度は p_i であることを示せ.
ヒント：$\exp A$ の固有多項式を計算する方法をとるのであればひと工夫要る.

問３． $A \in M_n(\mathbb{C})$ とする．$e^{\mathrm{tr} A} = \det \exp A$ が成り立つことを示せ.

問 4．

1) A を歪エルミート行列（歪対称行列）とすると $\exp A$ はユニタリ（直交）行列であることを示せ.
2) A をエルミート行列（対称行列）とすると $\exp A$ はのエルミート行列（対称行列）であることを示せ.
3) U をユニタリ行列とする．このとき, ある歪エルミート行列 A が存在して $U = \exp A$ が成り立つことを示せ.
4) $\exp A$, $A \in M_2(\mathbb{R})$ の形にはなりえない $\mathrm{GL}(2; \mathbb{R})$ の元を挙げよ．行列の次数が高いときはどうか.

問 5．

1) $A \in M_n(\mathbb{C})$ とする．${}^tA = A$ であるとき, A を複素対称行列と呼ぶ．複素対称行列であるが正規行列ではないような行列の例を挙げよ．また, そのような例がユニタリ行列で対角化できるかどうか調べよ.
2) 複素対称行列であるが対角化不可能であるような行列の例を挙げよ.

ヒント：いずれの場合も $A \in M_n(\mathbb{R})$ ではありえない（何故か？）．また, $n = 1$ でなければ任意の n に対して上のような例は存在する．特に 2 次の対称行列の例が存在するので, まず 2 次の場合から考えるのがよい.

問 6． $A \in M_n(\mathbb{C})$ とする.

1) AA^*, A^*A は共にエルミート行列であって, 固有値は 0 以上の実数であることを示せ.
2) $BB^* = AA^*$ をみたすエルミート行列 B が存在し, さらに A が正則であれば B はその固有値がすべて正の実数であるように選べることを示せ.
3) $A \in \mathrm{GL}(n; \mathbb{C})$ とする．2) のように, 固有値がすべて正の実数であるようなエルミート行列 B であって $BB^* = AA^*$ が成り立つものを選ぶ. $U = B^{-1}A$ とおくと U はユニタリ行列であることを示せ.
4) X をユニタリ行列かつエルミート行列とする．X の固有値がすべて正であれば X は単位行列に等しいことを示せ.
5) $A \in \mathrm{GL}(n; \mathbb{C})$ とすれば, $A = BU$, B は固有値がすべて正のエルミート行列, U はユニタリ行列と一通りにかけることを示せ.
6) $A \in \mathrm{GL}(n; \mathbb{C})$ とすれば, $A = UB$, B は固有値がすべて正のエルミート行列, U はユニタリ行列と一通りにかけることを示せ.

問7． A を直交行列とする．

1) α を A の固有値（の一つ）とする．α が実数であれば 1 または -1 であり，α が実数でなければ $\bar{\alpha}$ も A の固有値であって，しかも α と $\bar{\alpha}$ の重複度は等しいことを示せ．
2) α を A の実数ではない固有値とする．$\alpha = a + \sqrt{-1}b$, $a, b \in \mathbb{R}$ とする．A は $\mathbb{C}^n$ 上対角化可能であったから, $v \in \mathbb{C}^n$ を α に属する A の固有ベクトルとする．このとき, $v = u + \sqrt{-1}w$, $u, w \in \mathbb{R}^n$ とすると, $Au = au - bw$, $Aw = bu + aw$ が成り立つことを示せ．
3) v_1, v_2 が異なる固有値に属する A の固有ベクトルであればこれらは標準エルミート計量に関して直交することを示せ．
4) v を 2) のようにとり, $v = u + \sqrt{-1}w$, $u, w \in \mathbb{R}^n$ とすると u, w は標準計量に関して直交することを示せ．

   ヒント：A が実行列であることに注意して $Av = \alpha v$ の両辺の複素共役をとれば $\bar{v}$ は $\bar{\alpha}$ に属する固有ベクトルであるが, $\alpha \notin \mathbb{R}$ なので $\bar{\alpha} \neq \alpha$ である．
5) $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ を A の実固有値とし, v_i を α_i に属する固有ベクトルとする．ここで $v_i \in \mathbb{R}^n$ であるように v_i は選ぶ．$\alpha_{r+1}, \cdots, v_s$ を A の実数ではない固有値とする．1) により $\alpha_{r+2k} = \overline{\alpha_{r+2k-1}}$ としてよい．$v_{r+2j-1} \in \mathbb{C}^n$ を α_j に属する固有ベクトルとし, $v_{r+2j-1} = w_{r+2j-1} + \sqrt{-1}w_{2j}$, $w_{r+2j-1}, w_{r+2j} \in \mathbb{R}^n$ とする．このようにして得られたそれぞれのベクトルを定数倍して大きさを 1 にしておくと，$\{v_1, \cdots, v_r, w_{r+2j-1}, w_{r+2j}, \cdots, w_{n-1}, w_n\}$ は $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底であることを示せ．

   ヒント：本質的には 3) である．
6) 5) のようにして得られた基底に属するベクトルを並べて得られる行列を P とする．$P^{-1}AP$ を求めよ．

問8． $A \in M_n(\mathbb{C})$ とする．また, $\mathbb{C}^n$ には標準エルミート計量を入れる．

1) $v, w \in \mathbb{C}^n$ に対して，$\left.\dfrac{d}{dt}\langle \exp(tA)v, \exp(tA)w \rangle\right|_{t=0} = \langle Av, w \rangle + \langle v, Aw \rangle$ が成り立つことを示せ．
2) A が歪エルミート行列であれば $v, w \in \mathbb{C}^n$ に対して $\langle \exp(tA)v, \exp(tA)w \rangle = \langle v, w \rangle$ が t によらず成り立つことを示せ．

   ヒント：1) を用いてもよいし, 問 1 を用いて示すこともできる．

問9． 次の二次形式 f の符号を

i) 平方完成するなどして標準形に直す．
ii) 対応する実対称行列について, その固有方程式の根の様子を調べる．

の２つの方法で求めよ．ここで, 符号を求めるためには必ずしも固有方程式の根を具体的に求めなくともよいことに注意せよ.

1) $f(x,y,z) = 2x^2 + 2xy + 2\sqrt{2}xz + 2y^2 - 2\sqrt{2}yz + z^2$.
2) $f(x,y,z) = x^2 + 4xy - 2xz + y^2 + 6yz + z^2$.
3) $f(x,y,z,w) = x^2 + 4xy - 2xz + y^2 + 6yz + z^2$ （右辺に w が含まれないのは誤りではない）．

（以上）