問１.

(1) 奇数次の実行列は実数の固有値を 1 つ以上持つことを示せ.

(2) $S^2 = \left\{ {}^t(x,y,z) \,\middle|\, x^2+y^2+z^2=1 \right\} \subset \mathbb{R}^3$ とする. A を 3 次の直交行列とし, $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を $f(v) = Av$ で定めると, $v \in S^2$ について $f(v) \in S^2$ となることを示せ. また, このことを利用して直交行列は 1 または -1 を固有値に持つことを示せ.

(3) $A \in M_3(\mathbb{R})$ が実数上対角化可能で, $A^3 = E_3$ であれば $A = E_3$ であることを示せ.

ヒント：固有値がどのような値になるか考えてみよ.

問２. A をユニタリ行列とする.

1) A の固有値の大きさはすべて 1 であることを示せ. 特に固有値は 0 ではない.

2) $v_1 \in \mathbb{C}^n$ を A の固有ベクトルとする. $W = \mathbb{C}v_1 = \{\lambda v_1 \,|\, \lambda \in \mathbb{C}\}$ とすると, $W^\perp$ は A-不変である（$v \in W^\perp$ であれば $A \in W^\perp$ がなりたつ）ことを示せ.

ヒント：$\langle v, w\rangle = \langle Av, Aw\rangle$ が成り立つ.

3) $W^\perp \neq \{0\}$ であれば, $W^\perp$ の元で A の固有ベクトルであるものが存在することを示せ.

4) $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ を $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ をみたす複素数とすると, $\begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$ はユニタリ行列であることを示し, さらにこれをユニタリ行列により対角化せよ.

問３. A を正規行列とする.

1) $A = B^2$ なる行列が存在することを示せ.

2) A が実行列であって, A の固有値がすべて負でない実数であれば B は実行列に取れることを示せ.

3) A がエルミート行列であれば（$A^* = A$ であれば）$A = BB^* = B^*B$ をみたす B が存在することを示せ.

問４. $A \in M_n(\mathbb{C})$ とし, $\mathbb{C}^n$ に標準エルミート計量を入れる.

$$\lambda_1 = \sup_{\|v\|=1} \frac{\|Av\|}{\|v\|},\ \lambda_2 = \inf_{\|v\|=1} \frac{\|Av\|}{\|v\|}$$

とおく.

1) A が対角化可能であれば λ_1 は A の固有値の絶対値のうちの最大のものと一致することを示せ.

2) A が対角化可能であれば λ_2 は A の固有値の絶対値のうちの最小のものと一致することを示せ.

3) A が対角化可能でないときには λ_1, λ_2 と A の固有値にはどのような関係があるか考察せよ（難しい）.

問5． $\mathbb{C}^2$ 値の C^∞ 級函数 $f(t)=\begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}$ に関する常微分方程式

$$\frac{df}{dt}(t)=\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} f(t),$$

すなわち,

$$\begin{pmatrix} \frac{df_1}{dt}(t) \\ \frac{df_2}{dt}(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}$$

の一般解は

$$f(t)=\begin{pmatrix} c_1e^{a_1t} \\ c_2e^{a_2t} \end{pmatrix},\ c_1,\ c_2 \text{ は定数}$$

で与えられることを用いて, 常微分方程式

$$\frac{df}{dt}(t)=\begin{pmatrix} 8 & 6 \\ -9 & -7 \end{pmatrix} f(t)$$

を解け.（すなわち, 一般解を求めよ.）

問6． $V=\{$ 数列 $\{a_i\}_{i=0}^{\infty} \mid a_i\in\mathbb{C}\}$ とし, その部分空間

$$W=\{\{a_i\}_{i=0}^{\infty}\in V \,|\, a_{i+3}+3a_{i+2}-4a_{i+1}-12a_i=0\}$$

を考える. また, W の元 $\{a_0,a_1,\dots\}$ に対し, 項をひとつずらした数列 $\{a_1,a_2,\dots\}$ を対応させる線型写像を $D:W\to W$ とする.

1) D の固有値と固有ベクトルを求めよ.
2) それぞれの固有ベクトルと方程式 $t^3+3t^2-4t-12=0$ の関係について述べよ.

問7． $V=\{$ 高々 3 次の t に関する $\mathbb{C}$ 係数の多項式 $\}$ とし, V から V への写像 T を $T(f)(t)=f(2t-1)$ により定める. （$T(f)$ という多項式を $f(2t-1)$ で定めるという意味である.）

1) T は V の線型変換であることを示せ.
2) 線型変換 T の固有値と固有ベクトルを求めよ.

問8． 次に挙げる[1] 線型変換の

1) 固有値・それぞれの固有値に対する固有空間・それぞれの固有空間の次元を求めよ.
2) 対角化可能かどうか判定し, 対角化可能であれば対角化せよ. 即ち, 与えられた線型変換が対角行列で与えられるような基底を一組求めよ.

[1] I) は線型代数演習（齋藤正彦著 東大出版会）から改題

I) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 13 & -7 \\ -5 & 19 & -10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

II) $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2, \quad f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, α は複素定数.

III) $V = \{X \in M_2(\mathbb{C}) \,|\, \mathrm{tr}X = 0\}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ として,
$f(X) = [E, X] = EX - XE$ （EX や XE は行列として積を取ったもの）
※ この問題については $X \in V$ であれば $f(X) \in V$ であることも示すこと.
ヒント：V は $\mathbb{C}$ 上 3 次元のベクトル空間である.

問 9． 正方行列（何次でもよい）A, B であって, 以下の性質を持つものを一組挙げよ.

1) $A + B$ のある固有値で, (A のある固有値) + (B のある固有値) とはならないものが存在する.
2) AB のある固有値で, (A のある固有値) $\cdot$ (B のある固有値) とはならないものが存在する.

ヒント：実は $AB = BA$ であれば上の 1),2) は共に成り立つ（参考書などで調べてみよ）ので, $AB \neq BA$ なる A, B の組しか候補にはならない.

問 10． $N \in M_n(\mathbb{C})$ を $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & & 0 & 0 \end{pmatrix}$ とする. ただし, $n > 1$ とする.

1) $\alpha \in \mathbb{C}$ とし, $A = \alpha E_n + N$ とする. A の固有多項式を求め, A の固有値とその重複度を求めよ.
2) α を A の固有値とし, V_α を A の固有値 α に属する固有空間とする. V_α の次元を求めよ.
3) A は対角化不可能であることを示せ.

問 11． $A \in M_n(\mathbb{C})$ とし, $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ を A の相異なる固有値全体とする. また α_i の重複度を p_i とする.

1) $W_i = \left\{v \in \mathbb{C}^n \,\middle|\, (A - \alpha_i E_n)^k v = 0 \text{ がある } k \geq 1 \text{ について成り立つ}\right\}$ とする. W_i は $\mathbb{C}^n$ の部分線型空間であって, さらに $v \in W_i$ であれば $Av \in W_i$ であることを示せ. k は $v \in W_i$ によって変化しうることに注意せよ.
2) $\dim W_i \geq p_i$ を示せ.
ヒント：$P^{-1}AP$ が上三角行列であって, なおかつ対角成分の最初の p_i 個は α_i が並んでいるように P を取ることができるとする. このとき $P^{-1}(A - \alpha_i E_n)P$ を考えてみよ.
3) $v_i \in W_i$, $i = 1, \cdots, r$ とすると $v_1, \cdots, v_r$ は一次独立であることを示せ.

4) $\mathbb{C}^n = W_1 \oplus \cdots \oplus W_r$ であることを示せ.
ヒント：3) から $W_1 + \cdots + W_r$ が直和であることが分かる.

5) $W_i^{(1)}$ を α に属する A の固有空間とし, $W_i^{(k)}$, $k > 1$ を

$$W_i^{(k+1)} = \left\{ v \in \mathbb{C}^n \,\middle|\, (A - \alpha_i E_n)v \in W_i^{(k)} \right\}$$

により帰納的に定める. $W_i^{(k+1)} \supset W_i^{(k)}$ であることを示し, さらに $v \in W_i^{(k+1)}$ かつ $v \notin W_i^{(k)}$ であれば, $v, (A - \alpha_i E_n)v, \cdots, (A - \alpha_i E_n)^k v$ は一次独立であることを示せ.

6) $W_i^{(p_i)} = W_i^{(p_i+1)} = \cdots = W_i$ を示せ.
ヒント：2) と 4) から $\dim W_i$ が求まる.

7) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -4 & -2 & -3 & 1 \\ 6 & 2 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ のそれぞれについて下の 8) の作業を行ってみよ．なお２つ目の行列の固有値は 0 のみ, ３つ目の行列の固有値は -1 のみである [2].

8) W_i の元を次のように定めると, W_i の基底が得られることを示せ.
　まず, $W_i^{(r)} = W_i$ となるような最小の r をとり, $w_1^{(r)}, \cdots, w_{a_r}^{(r)} \in W^{(r)}$ を一次独立であって, さらに $W_i = W_i^{(r-1)} \oplus \langle w_1^{(r)}, \cdots, w_a^{(r)} \rangle$ が成り立つように取る．つぎに, $(A - \alpha_i E_n)w_b^{(r)}$ の形のベクトルをすべて考える．これらは $W_i^{(r-1)}$ の元であるが, さらに一次独立であって（何故か?）かつ $W_i^{(r-2)} + \langle (A - \alpha_i E_n)w_1^{(r)}, \cdots, (A - \alpha_i E_n)w_{a_r}^{(r)} \rangle$ は直和となる．そこで必要なら $W_i^{(r-1)}$ の元 $w_1^{(r-1)}, \cdots, w_{a_{r-1}}^{(r-1)}$ を付け加えて $W_i^{(r-1)} = W_i^{(r-2)} \oplus \langle (A - \alpha_i E_n)w_1^{(r)}, \cdots, (A - \alpha_i E_n)w_{a_r}^{(r)}, w_1^{(r-1)}, \cdots, w_{a_{r-1}}^{(r-1)} \rangle$ であるようにする．ただし, $\langle \ \rangle$ の中のベクトルは一次独立であるように $w_k^{(r-1)}$ 達は選ぶ．そして同様に $(A - \alpha_i E_n)^2 w_b^{(r)}$, $(A - \alpha_i E_n)w_c^{(r-1)}$ の形のベクトルを全て考えると, これらは $W_i^{(r-2)}$ の一次独立な元であって $W_i^{(r-3)} + \langle (A - \alpha_i E_n)^2 w_1^{(r)}, \cdots, (A - \alpha_i E_n)^2 w_{a_r}^{(r)}, (A - \alpha_i E_n)w_1^{(r-1)}, \cdots, (A - \alpha_i E_n)w_{a_{r-1}}^{(r-1)} \rangle$ は直和となる．そこで必要であれば $W_i^{(r-2)}$ の元 $w_1^{(r-2)}, \cdots, w_{a_{r-2}}^{(r-2)}$ を付け加える．この作業を繰り返して得られたベクトルをすべて集めれば W_i の基底が得られる.

9) 8) のように得られたベクトルは $(A - \alpha_i E_n)^{k_1} w_1, (A - \alpha_i E_n)^{k_1 - 1} w_1, \cdots, w_1, (A - \alpha_i)^{k_2} w_2, \cdots, w_2, \cdots$ のような具合に並べることができる. W_i のすべてについてこのように基底を作ってすべてを順番にならべた行列 P とすると $P^{-1}AP$ は $\alpha_i E_{p_i} + N$ を対角線上に並べた行列となることを示せ．これを Jordan 標準形という.

10) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 13 & -7 \\ -5 & 19 & -10 \end{pmatrix}$ の Jordan 標準形を求めよ [3].

（以上）

[2,3] 線型代数演習（齊藤正彦著 東大出版会）より引用