問１． $V=\{x$ に関する高々3 次の実多項式 $\}$ とする．V は多項式の和・実数倍に関して $\mathbb{R}$-線型空間である．

1) $\mathcal{F}=\{x^3+x^2+x,\ x^3+x^2+1,\ x^3+x+1,\ x^2+x+1\}$ は V の基底であることを示せ．
2) $W_1=\{x$ に関する高々1 次の実多項式 $\}$ とする．W_1 は V の部分線型空間である（確信がもてなければ確かめよ）．W_1 の（$\mathbb{R}$-上の）基底を一組求めよ．
3) $W_2=\{f\in V\,|\,f(1)=f(2)=0\}$ とする．W_2 は V の部分線型空間であることを示し, 基底を一組求めよ．
4) $W_3=\{f\in V\,|\,f(1)=0\}$, $W_4=\{f\in V\,|\,f(2)=0\}$ とする．W_3, W_4 は V の部分線型空間であって, $W_2=W_3\cap W_4$ であることを示せ．また, W_3, W_4 の基底であって, 3) で求めた W_2 の基底の拡大（延長）となっているものを一組ずつ求めよ．
5) $V=W_3+W_4$ であることを示せ．また、$\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2$ をそれぞれ 4) で求めた W_3,W_4 の基底とする時、$\mathcal{E}\subset\mathcal{E}_1\cup\mathcal{E}_2$ となる V の基底 $\mathcal{E}$ を一組求めよ。
6) $\mathcal{E}$ から $\mathcal{F}$ への基底の変換行列を求めよ．

問２． $A=\begin{pmatrix}3&0&0\\1&2&0\\1&3&-1\end{pmatrix}$ とし, $f\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ を $f(v)=Av$ により定める．

1) $Av_1=-v_1$ をみたす $v_1\neq 0$ を一つ求めよ．
2) $Av_2=2v_2$ をみたす $v_2\neq 0$ を一つ求めよ．
3) $Av_3=3v_3$ をみたす $v_3\neq 0$ を一つ求めよ．
4) $\{v_1,v_2,v_3\}$ は $\mathbb{R}^3$ の基底であることを示せ．
5) 上で求めた基底に関する f の行列表示を求めよ．

問３． $A\in M_n(K)$ とし, $f\colon K^n\to K^n$ を $f(v)=Av$ により定める．$v\in K^n$, $v\neq 0$ であって, $f(v)=\lambda v$ が成り立っているとすると, $\det(\lambda E_n-A)=0$ であることを示せ．
ヒント：$f(v)=Av$, $\lambda v=\lambda E_n v$ だから, $f(v)=\lambda v$ であれば $Av=\lambda E_n v$ である．従って $(\lambda E_n-A)v=0$ である．

問４． 2 次の複素正方行列 A を

$$A=\begin{pmatrix}a_1+b_1\sqrt{-1}&a_2+b_2\sqrt{-1}\\a_3+b_3\sqrt{-1}&a_4+b_4\sqrt{-1}\end{pmatrix},\quad \text{ただし,}\quad a_i,b_i\in\mathbb{R},$$

により定め, $\mathbb{C}$-線型写像 $T_A:\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^2$ を $T_A(x)=Ax$ $(x\in\mathbb{C}^2)$ で定める．$\mathbb{C}^2$ を $\mathbb{R}$-線型空間とみなす．

1) $\mathcal{E}=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\sqrt{-1}\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-\sqrt{-1}\end{pmatrix}\right\}$ は $\mathbb{C}^2$ の $\mathbb{R}$-上の基底であることを示せ．
2) $\mathbb{R}$-線型写像 T_A の基底 $\mathcal{E}$ に関する行列表示を求めよ．

問5． $X = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2} & -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} & -\dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$ とし,

$$V = \{a_0E_2 + a_1X + \cdots + a_rX^r \mid a_0, \cdots, a_r \in \mathbb{R}\}$$

とする. $V \subset M_2(\mathbb{R})$ である.

1) V は行列の和と実数倍に関して線型空間であることを示せ. 必要であれば $M_2(\mathbb{R})$ が行列の和と実数倍に関して線型空間であることを用いてもよい.
2) $V' = \left\{x_0E_2 + x_1X + x_2X^2 \,\middle|\, x_0, x_1, x_2 \in \mathbb{R}\right\}$ とすると線型空間として $V' = V$ であることを示せ.
3) $A \in V$ のとき, $f(A) = XA$ と定めると $f(A) \in V$ であることを示せ.
4) $\{E_2, X\}$ は V の基底であることを示せ. したがって $V'' = \{x_0E_2 + x_1X \mid x_0, x_1 \in \mathbb{R}\}$ とすると線型空間として $V'' = V$ である.
5) 基底 $\{E_2, X\}$ に関して 3) の f を行列表示せよ.
6) 5) で求めた行列を Y とすると $Y^3 = E_2$ が成り立つことを示せ.

問6． $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 3 \\ 3 & -2 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ とし, $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ を $f(v) = Av$ により定める（5月 14 日の問 1 .2) も参照のこと）.

1) v に関する方程式 $Av = 0$ を解け.
2) $\operatorname{Ker} f$ を求めよ.
3) $\operatorname{Im} f$ を求めよ.
4) $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \in \operatorname{Im} f$ を示せ.

問7． $\mathbb{R}$ を通常の $\mathbb{R}$-線型空間とし，$\mathbb{R}^\times = \{t \in \mathbb{R} \mid t > 0\}$ を

$$\text{和} \quad : t, s \in \mathbb{R}^\times \text{ に対し，} t \oplus s = ts \quad \text{（実数の積）},$$
$$\text{スカラー倍} : \lambda \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}^\times \text{ に対し，} \lambda \otimes t = t^\lambda \quad \text{（実数の冪乗）}$$

で定めた $\mathbb{R}$-線型空間とする．また，$\mathbb{R}$-線型写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^\times$ を $f(x) = e^x$ で定める．$\mathbb{R}$ の基底として $\mathcal{E} = \{2\}$, $\mathbb{R}^\times$ の基底として $\mathcal{F} = \{2\}$ をとるとき，f の基底 $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ に関する行列表示を求めよ.

ヒント：「行列」とは言うものの，サイズは 1×1 である.

（以上）