**問１．**

1) $x, y \in \mathbb{R}$ とする．このとき行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{pmatrix}$$

で定まる線型写像 $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ の像と核を求めよ．

2) $x, y \in \mathbb{R}$ とする．このとき行列

$$A = \begin{pmatrix} \frac{-1}{(1+x^2+y^2)} & \frac{-1}{(1+x^2+y^2)} \\ \frac{-x}{(1+x^2+y^2)} & \frac{-y}{(1+x^2+y^2)} \end{pmatrix}$$

で定まる線型写像 $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ の像と核を求めよ．

3) $a, b \in \mathbb{R}$ とし，$V$ の部分線型空間 $W$ を $W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, ax_1 + bx_2 = 0 \right\}$ と定める． 1) の $f$ を $W$ の元だけについて考えることにすると，$W$ から $\mathbb{R}^2$ への写像が得られるのでこれを $f|_W$ と記して $f$ の $W$ への制限と呼ぶことにする． $f|_W: W \to \mathbb{R}^2$ は線型写像であることを示し，その像と核を求めよ．また，$f|_W$ が $W$ から $W$ への線型写像を定めるための $a, b, x, y$ に関する条件を求めよ．

**問２．** $\mathbb{N} = \{$ 自然数 $\} = \{0, 1, 2, \cdots\}$ とする．

1) $X = \{f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}\}$ とする．$X$ は函数の和と実数倍に関して $\mathbb{R}$-線型空間であることを示せ．

2) $Y = \{f: \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid \exists m \in \mathbb{N},\ n \geq m \Rightarrow f(n) = 0\}$ とする． $Y$ は $X$ の $\mathbb{R}$-部分線型空間であることを示せ．

3) $g : X \to X$ を $g(f)(0) = f(0)$, $n > 0$ のとき $g(f)(n) = f(n) + nf(n-1)$ として定める．$g$ は $\mathbb{R}$-線型写像であることを示せ．また，$g$ の像と核を求めよ．

4) $h : Y \to Y$ を $h(f)(0) = f(0)$, $n > 0$ のとき $h(f)(n) = f(n) + nf(n-1)$ として定める（式は $g$ と同じ）．$h$ は $\mathbb{R}$-線型写像であることを示せ．また，$h$ の像と核を求めよ．

**問３．** （線型写像の行列表示：来週以降に講義で一般的に扱うことの一例）

1) $V$ を $K$-線型空間とし，$\{v_1, \cdots, v_n\}$ を $V$ の基底とする． $f: K^n \to V$ を，$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n$ のとき

$$f(x) = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n$$

として定めると $f$ は $K$-線型同型写像であることを示せ．

2) 1) で $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^2$, $v_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ としたときの $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を行列表示せよ．

3) $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を $g\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\frac{1}{2}\sin\theta \\ 2\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ として定める．1) より 2) の $f$ は $\mathbb{R}$-線型同型写像なので $f^{-1}$ が存在する．そこで $G\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を $G = f^{-1} \circ g \circ f$ として定める．このとき $G$ を行列表示せよ．

**問4．** $\{v_1, \cdots, v_n\}$, $\{w_1, \cdots, w_n\}$ を共に $K^n$ の基底とする．

1) $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n$ のとき，まず $v = x_1v_1 + \cdots + x_nv_n$ と定める．このとき，$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in K^n$ が唯一存在して $v = y_1w_1 + \cdots + y_nw_n$ と表せることを示せ.

2) $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n$ の時, 1) のようにして（$v$ を経由して）$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in K^n$ を得ることが出来るので, $f(x) = y$ と定める．この $f$ は $K$-線型同型写像であることを示せ.

3) $\{v_1, \cdots, v_n\}$ が $K^n$ の自然な基底であるとする（つまり，$v_i = e_i$ であるとする）．このとき $f$ を行列 $(w_1 \ \cdots \ w_n)$ を用いて表示せよ．

4) 一般の場合に $f$ を行列 $(v_1 \ \cdots \ v_n)$ と $(w_1 \ \cdots \ w_n)$ を用いて表示せよ．

**問5．** $\mathbb{C}$ を通常の数の和と積で線型空間とみなす. $\mathbb{C}$ は $\mathbb{C}$-線型空間とも $\mathbb{R}$-線型空間ともみなせるが, $\mathbb{C}$ 上の次元は 1, $\mathbb{R}$ 上の次元は 2 であることを示せ.

**問6．** 以下に挙げる $M_n(\mathbb{R})$ あるいは $M_n(\mathbb{C})$ と，その部分集合 $X$ の組（$X \subset M_n(\mathbb{R})$ あるいは $X \subset M_n(\mathbb{C})$ と表すことにする）について，

1) $X$ はそれぞれの空間の $K$-部分線型空間であることを示し, その基底を一組挙げて $K$ 上の次元を求めよ．

2) 1) で求めた基底の拡大となっているような $M_n(\mathbb{R})$ あるいは $M_n(\mathbb{C})$ の $K$ 上の基底を求めよ．

i) $\mathfrak{o}(n) = \{X \in M_n(\mathbb{R}) \,|\, X + {}^tX = 0\} \subset M_n(\mathbb{R})$. ただし $K = \mathbb{R}$.

ii) $S = \{X \in M_n(K) \,|\, X = {}^tX\} \subset M_n(K)$.

iii) $\mathfrak{sl}(n; K) = \{X \in M_n(K) \,|\, \mathrm{tr}X = 0\} \subset M_n(K)$.

iv) $\mathfrak{u}(n) = \left\{X \in M_n(\mathbb{C}) \,\middle|\, X + {}^t\overline{X} = 0\right\} \subset M_n(\mathbb{C})$. ただし $K = \mathbb{R}$.

注意：i) から iii) は $M_n(K)$ の $K$-部分線型空間であるが，iv) は $M_n(\mathbb{C})$ の $\mathbb{R}$-部分線型空間にしかならない．iv) では $\mathbb{C}$-部分線型空間にならないことも確かめてみよ．

（以上）