２００７年度数学 II 演習（理 I）　　　　　　　　　'07/6/25（月）４限

問１． クラメルの公式を用いて次の連立一次方程式を解け．

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_1 + 3x_2 + (3+t)x_3 = 1, \end{cases}$$

ただし $t \neq 0$ とする．

※ すぐ気づくと思うが，非常に面倒であって凡そ実用的でない．

問２． V を $\mathbb{R}$-線形空間とする．$V^* = \{V$ から $\mathbb{R}$ への $\mathbb{R}$-線型写像$\}$ とする．そして

i) $f_1, f_2 \in V^*$ に対して $f_1 + f_2$ を $(f_1+f_2)(v) = f_1(v) + f_2(v)$ で定め，

ii) $f \in V^*$, $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して λf を $(\lambda f)(v) = \lambda(f(v))$ で定める

1) 上で定めた $f_1 + f_2$, λf は共に V^* の元であることを示せ．すなわちそれぞれの写像が $\mathbb{R}$-線型写像であることを示せ．

2) V^* は上で定めた演算により $\mathbb{R}$-線型空間であることを示せ．

定義． V^* を上のように $\mathbb{R}$-線型空間とみなしたものを V の双対（そうつい）空間と呼ぶ．V が $\mathbb{C}$-線型空間であるときには，$V^* = \{V$ から $\mathbb{C}$ への $\mathbb{C}$-線型写像$\}$ とし，同様の演算により V^* は $\mathbb{C}$-線型空間として定める．

問３． V, W を $\mathbb{R}$-線形空間，$f\colon V \to W$ を $\mathbb{R}$-線型写像とする．$f^*\colon W^* \to V^*$ を $\varphi \in W^*$ に対して $f^*(\varphi) = \varphi \circ f$ とおくことによって定める．

1) f^* は確かに W^* から V^* への写像であって，しかも $\mathbb{R}$-線型写像であることを示せ．

2) さらに U も $\mathbb{R}$-線型空間であって $g\colon W \to U$ が $\mathbb{R}$-線型写像であるならば $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$ であることを示せ．（f^* と g^* の順番に注意）

問４． V が $\mathbb{C}$-線型空間であれば，（自然に）$\mathbb{R}$-線型空間であることを示せ．

問５． $\mathbb{C}$ は通常の加法･積を用いて $\mathbb{C}$-線型空間（したがって $\mathbb{R}$-線型空間）とみなす．

1) $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ を $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ に対して $f(v) = \begin{pmatrix} x^2+y^2+z^2 \\ x+y \end{pmatrix}$ と定める．f は $\mathbb{R}$-線型写像でないことを示せ．

2) $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ を $f(z) = \bar{z}$（複素共役）で定める．f は $\mathbb{R}$-線型写像であるが，$\mathbb{C}$-線型写像ではないことを示せ．

問６．

1) $V = \{$ 実数を係数とする t に関する多項式 $\}$ とおき，自然な和や実数倍を考えると V は $\mathbb{R}$-線型空間であることを示せ．ここで，単項式や定数も多項式とみなす．

2) $V = \{t \in \mathbb{R} \,|\, t > 0\}$ と置く．$t, s \in V$ について $t \oplus s = ts$ と定め，$t \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$ について $\lambda . t = t^\lambda$ と定めると, V は $\oplus$ を和, . を実数倍とする演算により $\mathbb{R}$-線型空間であることを示せ.

3) 2) の V について $f\colon \mathbb{R} \to V$ を $f(v) = e^v$ と定めると,

$$f(v_1 + v_2) = f(v_1) \oplus f(v_2),$$
$$f(\lambda v) = \lambda . f(v)$$

が任意の $v_1, v_2, v \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ について成り立つことを示せ．（つまり, f は $\mathbb{R}$-線型写像であることを示せ.）

問7． A を $(m \times n)$-行列, $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$ とする．行列を用いて $Av = c$ と表される $v_1, \cdots, v_n$ に関する連立一次方程式を考え, $V = \{v \in \mathbb{R}^n \,|\, Av = c\}$ と定め, $V \neq \emptyset$ と仮定する．これにさらに方程式

$$a_{m+1,1} v_1 + \cdots + a_{m+1,n} v_n = c_{m+1}$$

を付け加えて，$\widetilde{V} = \{v \in \mathbb{R}^n \,|\, Av = c, a_{m+1,1} v_1 + \cdots + a_{m+1,n} v_n = c_{m+1}\}$ と置く．ここで，$(m \times (n+1))$-行列 $\widetilde{A}$ を $\widetilde{A} = (A\ c)$ として定める（拡大係数行列を考える）．そして $\varphi_{{}^t\widetilde{A}}\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{n+1}$ を $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix}$ に対して ${}^t\widetilde{A} w$ を与える写像として定める．

すると, $\widetilde{V} = V$ であることと, $\begin{pmatrix} a_{m+1,1} \\ \vdots \\ a_{m+1,n} \\ c_{m+1} \end{pmatrix} \in \operatorname{Im} \varphi_{{}^t\widetilde{A}}$ であることは同値であることを示せ.

ヒント：$A' = \begin{pmatrix} & A & & c \\ a_{m+1,1} & \cdots & a_{m+1,n} & c_{m+1} \end{pmatrix}$ と置く．$\widetilde{V} = V$ であることと, A' を左基本変形で $\begin{pmatrix} & A & & c \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$ と変形できることが同値であることが示せたとする．これは ${}^tA' = \begin{pmatrix} & a_{m+1,1} \\ {}^tA & \vdots \\ & a_{m+1,n} \\ c & c_{m+1} \end{pmatrix}$ を右基本変形で $\begin{pmatrix} & 0 \\ {}^tA & \vdots \\ & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$ に変形できることと同値である．このことを踏まえて ${}^tA$ と $\begin{pmatrix} a_{m+1,1} \\ \vdots \\ a_{m+1,n} \\ c_{m+1} \end{pmatrix}$ の間に成り立つ関係について考察せよ.

（以上）