２００７年度数学 II 演習（理 I）　　　　　　　　　　'07/5/28（月）４限

問１． 以下の行列の逆行列を求めよ．
（複素数を成分とする行列は講義では扱っていないが，実数のときと同様に計算すればよい．例えば掃き出し法を用いるのであれば，定数 λ をある行（列）にかけるときには λ は 0 でない複素数，ある行（列）の定数 μ 倍を別な行（列）に加えるときには，μ は複素数とすればよい）．

1) $\begin{pmatrix} 4\cos x & -4\sin x & 3 \\ 3\cos x & -3\sin x & -4 \\ 5\sin x & 5\cos x & 0 \end{pmatrix}$　　2) $\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{-1} & -1 \\ \sqrt{-1} & 1 & -\sqrt{-1} \\ 1 & -\sqrt{-1} & 1 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 0.8 & 0.36 & 0.48 \\ 0.36 & -0.48 & -0.64 \\ 0 & 0.8 & -0.6 \end{pmatrix}$

問２． n 次正方行列 A, B が $AB = BA$ を充たすとき A と B は可換であるという．n 次正方行列 A と B が可換であって A が正則であれば A^{-1} と B は可換であることを示せ．

問３． A を $(m \times n)$ 行列，P を m 次正則行列，Q を n 次正則行列とする．A のランクは r であるとすると，PAQ のランクも r であることを示せ．

問４． （重ね合わせの原理）
　A を $(m \times n)$ 行列, c を $\mathbb{R}^m$ の元とする．$\mathbb{R}^n$ の部分集合 V, W を

$$V = \{v \in \mathbb{R}^n \,|\, Av = 0 \in \mathbb{R}^m\},\ W = \{v \in \mathbb{R}^n \,|\, Av = c\}$$

で定める．ここで，$W \neq \emptyset$ と仮定する．

1) $v_1, v_2 \in V$, $a, b \in \mathbb{R}$ とすると $av_1 + bv_2 \in V$ であることを示せ．
2) $v \in V$, $w \in W$ とすると $v + w \in W$ であることを示せ．
3) $w_0 \in W$ を一つ固定する．$v \in V$ に対して $f(v) = v + w_0$ と定めると 2) より $f(v) \in W$ である．つまり f は V から W への写像である．f は全単射であることを示せ．また，逆写像 f^{-1} を求めよ．

問５． A を $(m \times n)$ 行列とし, $V = \{v \in \mathbb{R}^n \,|\, Av = 0 \in \mathbb{R}^m\}$ とする．

1) P を m 次正則行列として, $V_1 = \{v \in \mathbb{R}^n \,|\, PAv = 0 \in \mathbb{R}^m\}$ と定めると $V_1 = V$ であることを示せ．
2) Q を n 次正則行列として, $V_2 = \{v \in \mathbb{R}^n \,|\, AQv = 0 \in \mathbb{R}^m\}$ と定める．$v' \in V_2$ のとき $f(v') = Qv'$ と定めると $f(v') \in V$ であることを示せ．また, $v \in V$ の時 $g(v) = Q^{-1}v$ と定めると $g(v) \in V_2$ であることを示せ．
3) 2) の記号の下で，$f \circ g = \mathrm{id}_V$, $g \circ f = \mathrm{id}_{V_2}$ であることを示せ．ここで，$\mathrm{id}_V\colon V \to V$ は $\mathrm{id}_V(v) = v$, $\mathrm{id}_{V_2}\colon V_2 \to V_2$ は $\mathrm{id}_{V_2}(v') = v'$ で定まる写像である．（このような写像を恒等写像と呼ぶ.）

（以上）