問１． 行列 X, Y を

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

とするとき，三つの行列 $(X+Y)^2$, $X^2+2XY+Y^2$, $(X+Y)^2-(X^2+2XY+Y^2)$ を全て求めよ.

問２． X, Y を n 次行列とする.（小問毎に解答してもよい）

1) $(X+Y)^2 = X^2+2XY+Y^2$ となるための X,Y に関する必要十分条件は $XY=YX$ であることを示せ.
2) 一般には，上の条件 $XY = YX$ は成り立たないことを示せ．また，条件 $XY=YX$ が成り立つような X,Y の例をいくつか挙げよ.

行列の積に関しては，たとえば $(AB)C=A(BC)$, $A(B+C)=AB+AC$ などが成り立ち，数（実数や複素数）に関する積と同様な性質が多く成り立つが，一般には $XY=YX$ が成り立たなかったり，$A,B\neq O$ であっても $AB=O$ となったりする．言い換えれば，$AB=O$ だからといって $A=O$ または $B=O$ とは一般には**言えない**．分かっているようでもしばしば間違えてしまうので注意を要する.

問３． (a) から f) のどれかひとつについて解答すればよい.）
以下の a) から f) の行列に適宜左右の基本変形を繰り返して

$$\begin{pmatrix} E_r & O_{r,\ n-r} \\ O_{m-r,\ r} & O_{m-r,\ n-r} \end{pmatrix}$$

の形にせよ（必ず出来る：このことは後日講義でも触れる）．また，正方行列 A がもし E_r の形に変形できるときには（つまり，上の行列で $m=n=r$ となるとき），実は左基本変形のみを用いて A を E_r に変形出来るので，そのような変形を示せ.[2]

a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$　b) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -3 & -3 \\ 6 & -4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$　c) $\begin{pmatrix} t & s \\ 0 & u \end{pmatrix}$ 但し $t,s,u\in\mathbb{R}$

d) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$　e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$　f) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

（複素数）
以下では $\theta\in\mathbb{R}$ のとき $e^{\sqrt{-1}\theta} = \cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta$ であることは認めて用いる．$\theta,\varphi\in\mathbb{R}$ であれば $e^{\sqrt{-1}\theta}e^{\sqrt{-1}\varphi} = e^{\sqrt{-1}(\theta+\varphi)}$ が成り立つ．複素数の和・積は

$$(x_1+\sqrt{-1}y_1)+(x_2+\sqrt{-1}y_2) = (x_1+x_2)+\sqrt{-1}(y_1+y_2)$$
$$(x_1+\sqrt{-1}y_1)\cdot(x_2+\sqrt{-1}y_2) = (x_1x_2-y_1y_2)+\sqrt{-1}(x_1y_2+x_2y_1)$$

[1] 問１から問３は昨年度の文系向け演習問題とほぼ同一である.
[2] e) f) は笠原晧司著 線形代数学（サイエンス社）より改題

で定める．ただし，$x_i, y_i \in \mathbb{R}$.

定義． $z = x + \sqrt{-1}y,\ x, y \in \mathbb{R}$ とする．

1) x を z の実部，y を z の虚部と呼び，$x = \mathrm{re}\, z,\ y = \mathrm{im}\, z$ などと記す．
2) z の共役複素数 $\bar{z}$ を $\bar{z} = x - \sqrt{-1}y$ と定める．
3) $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$ とおき，z の絶対値という.（問４の後半も参照のこと.）
4) $z \neq 0$ のとき，$e^{\sqrt{-1}\theta} = \dfrac{z}{|z|}$ となる $\theta \in \mathbb{R}$ を z の偏角と呼び，$\theta = \arg z$ と表す．偏角には $2\pi\mathbb{Z}$ だけの任意性がある（つまり，θ が z の偏角であれば，$\theta + 2n\pi$ は任意の $n \in \mathbb{Z}$ について z の偏角である）ので，目的に応じて適宜選ぶ．偏角の選び方としては，$0 \le \arg z < 2\pi$ あるいは $-\pi \le \arg z < \pi$ がしばしば用いられる．$z = 0$ の時は偏角は通常は考えない．

問４． （全体で一問）$z \in \mathbb{C}$ のとき，$\mathrm{re}\, z = \dfrac{z + \bar{z}}{2},\ \mathrm{im}\, z = \dfrac{z - \bar{z}}{2\sqrt{-1}}$ を示せ．また，$t \in \mathbb{R}$ であれば，$t \in \mathbb{C}$ とみなして $|t| = \sqrt{t\bar{t}}$ を計算すると t の実数としての絶対値と一致することを示せ.

問５． （全体で一問）

1) $z \in \mathbb{C}$ について $|z| \ge 0$, また，$|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.
2) $z, w \in \mathbb{C}$ について $|z + w| \le |z| + |w|$.

問６． $z, w \in \mathbb{C}$ のとき，次を示せ.（全体で一問）

1) $z, w \in \mathbb{C}$ のとき，$|zw| = |z|\,|w|$ を示せ.
2) $z, w \in \mathbb{C},\ z, w \neq 0$ のとき，$\arg zw = \arg z + \arg w$ を示せ．ただし，2π の整数倍の差は無視する．たとえば 0 と 2π は同じとみなし，あるいは $\sqrt{2}$ と $\sqrt{2} - 16\pi$ も同じとみなす.
   ※「$\arg zw - (\arg z + \arg w)$ は常に 2π の整数倍であることを示せ.」でも同じ意味である.

$z \in \mathbb{C}$ のとき，$z = x + \sqrt{-1}y,\ x, y \in \mathbb{R}$ とただ一通りに書けるから，$\mathbb{C}$ と $\mathbb{R}^2$ を対応 $z \mapsto \binom{x}{y}$ で同一視する.

問７． （小問毎に解答してもよい）

0 でない複素数 z, w が与えられたとき，z に対応する $\mathbb{R}^2$ の点を Z, w に対応する $\mathbb{R}^2$ の点を W で表す．$\overrightarrow{OZ}, \overrightarrow{OW}$ で対応する（位置）ベクトルを表す.

1) $u = z + w$ とし，U で u に対応する $\mathbb{R}^2$ の点を表す．$\overrightarrow{OU} = \overrightarrow{OZ} + \overrightarrow{OW}$ であることを示し，この等しいベクトルを定規とコンパスで作図せよ[3].
2) $u = zw$ とし，U で u に対応する $\mathbb{R}^2$ の点を表す．このとき $\overrightarrow{OU}$ を定規とコンパスで作図せよ[3]．ただし，$e = 1 \in \mathbb{R}$ および対応する $\mathbb{R}^2$ の点 $E = \binom{1}{0}$ は与えられているとしてよい.[4]

（以上）

---

[3]作図する方法を記述し，説明せよ．作図によって得られる点が確かに u であることも示す必要がある.（なお，1) に関しては問題文中にそのことはほとんど示されている.）

[4]ヒント：u の絶対値，偏角が問６を用いればわかるので，それを参考にしつつ，O と E, Z, W, U のうちの２点を選んで三角形をいろいろ描いてみるとおおよその見当がつく.