２００６年度数学 II（社学）演習　　　　　'06/4/26（水）１時限

問１． 行列 X, Y を

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

とするとき，以下の行列を計算せよ.

1) $(X+Y)^2$
2) $X^2 + 2XY + Y^2$
3) $(X+Y)^2 - (X^2 + 2XY + Y^2)$

問２． X, Y を n 次行列とする.

1) $(X+Y)^2 = X^2 + 2XY + Y^2$ となるための X, Y の条件は $XY = YX$ であることを示せ.
2) 一般には，上の条件 $XY = YX$ は成り立たないことをしめせ.
3) 条件 $XY = YX$ が成り立つような X, Y の例を挙げよ.

行列の積は数の積と比較的よく似た性質を持つ（たとえば，$(AB)C = A(BC)$, $A(B+C) = AB + AC$ など）が，問２にあるように，一般には $XY = YX$ が成り立たなかったり，$A, B \neq O$ であっても $AB = O$ となったりする．言い換えれば，$AB = O$ だからといって $A = O$ または $B = O$ では**ない**．分かっているようでもしばしば間違えてしまうので注意を要する.

問３．

1) 以下の行列に適宜左右の基本変形を繰り返して

$$\begin{pmatrix} E_r & O_{r,\, n-r} \\ O_{m-r,\, r} & O_{m-r,\, n-r} \end{pmatrix}$$

の形にせよ（必ず出来る）.

2) もし E_r の形に変形できるときには実は左基本変形のみを用いても変形が出来るので，そのような変形を示せ.[1]

a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$　b) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -3 \\ 6 & -4 & 3 \end{pmatrix}$　c) $\begin{pmatrix} t & s \\ 0 & u \end{pmatrix}$ 但し $t, s, u \in \mathbb{R}$

d) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$　e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$　f) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

（以上）

[1] e) f) は笠原晧司著 線形代数学（サイエンス社）より改題