２００４年度数学 II 演習 '05/1/26（水）２時限 (10:40〜12:10)

問１. n 次実対称行列 A に対し, 線形写像 $T_A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ を

$$T_A(x)=Ax,\ (x\in\mathbb{R}^n)$$

で定める. ここで $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_k\in\mathbb{R}$ を T_A の相異なる（すべての）固有値とし, $W_{\lambda_1},W_{\lambda_2},\cdots,W_{\lambda_k}$ をそれぞれの固有値に対する固有空間とする.

1) A は実対称行列であるから, 直交行列により対角化可能である. このことを用いて

$$\mathbb{R}^n=W_{\lambda_1}\oplus W_{\lambda_2}\oplus\cdots\oplus W_{\lambda_k}$$

であることを示せ. この直和分解を T_A による $\mathbb{R}^n$ の固有空間分解と呼ぶこともある.

いま, $\mathbb{R}$ 上の連続函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ に対し, 写像 $T_{f,A}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ を次のように定める:

$x\in\mathbb{R}^n$ を上の直和分解に対応して $x=x_1+x_2+\cdots+x_k$ $(x_i\in W_{\lambda_i})$ と表し, $T_{f,A}(x)=f(\lambda_1)x_1+f(\lambda_2)x_2+\cdots+f(\lambda_k)x_k$ とする.

2) $T_{f,A}$ は線形写像であることを示せ.

3) $f(t)=e^t$, $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$ のとき, 線形写像 $T_{f,A}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ の標準基底に関する表現行列を求めよ.

問２. 次の二次形式 f の符号を

i) 平方完成するなどして標準形に直す.

ii) 対応する実対称行列について, その固有方程式の根の様子を調べる.

の２つの方法で求めよ. ここで, 符号を求めるためには必ずしも固有方程式の根を具体的に求めなくともよいことに注意せよ.

1) $f(x,y,z)=2x^2+2xy+2\sqrt{2}xz+2y^2-2\sqrt{2}yz+z^2$.

2) $f(x,y,z)=x^2+4xy-2xz+y^2+6yz+z^2$.

3) $f(x,y,z,w)=x^2+4xy-2xz+y^2+6yz+z^2$ （右辺に w が含まれないのは誤りではない）.

問3．$\mathfrak{o}(n) = \{X \in M_n(\mathbb{R}) \,|\, X + {}^tX = 0\}$ とおく．$X, Y \in \mathfrak{o}(n)$ に対して $\langle X, Y\rangle = \mathrm{tr}({}^tX \cdot Y)$ と定める．

1) $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ は $\mathfrak{o}(n)$ の内積を定めることを示せ．
2) 適当な $\mathfrak{o}(n)$ の基底から始めてグラムーシュミットの方法を用いて正規直交基底を一組求めよ．
   ヒント：$\dim \mathfrak{o}(n) = \frac{n(n-1)}{2}$ である．

問4．$K = \mathbb{R}$ あるいは $K = \mathbb{C}$ とする．$X \in M_n(K)$ に対して, $\exp X$ あるいは $\exp(X)$ と書かれる $M_n(K)$ の元を

$$\begin{aligned}\exp X &= I_n + X + \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{3!}X^3 + \cdots + \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}X^k\end{aligned}$$

として定める．ここで $0! = 1$, $X^0 = I_n$ と定める．上の級数が収束することは証明を要するが, ここではそれは認める．

1) $t \in \mathbb{R}$ を変数とみなし, $Y \in M_n(K)$ に対して（$X = tY$ として）$\exp(tY)$ を考える．
   $$\frac{d}{dt}\exp(tY) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dt}\frac{1}{k!}(tY)^k$$
   が成り立つ, 即ち $\exp(tY)$ は項別微分可能であることを用いて $\dfrac{d}{dt}\exp(tY) = Y\exp(tY) = (\exp(tY))Y$ が成り立つことを示せ．（実は $t \in \mathbb{C}$ としてもこの式は意味を持つ.）
2) $P \in \mathrm{GL}(n; K)$ のとき, $\exp(P^{-1}XP) = P^{-1}(\exp X)P$ であることを示せ．
3) 次の行列 X について, $\exp tX$ を計算せよ．
   3-i) $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$　3-ii) $X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$　3-iii) $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
4) $X, Y \in M_n(K)$ が $XY = YX$ を満たせば $\exp(X + Y) = \exp X \exp Y = \exp Y \exp X$ が成り立つことを示せ．本来は収束の問題は重要であるが, ここでは形式的な計算をすればよい．
5) $X \in M_n(K)$ のとき, $\det\exp X = e^{\mathrm{tr}X}$ であることを示せ（X の三角化あるいは Jordan 標準形を用いるのが簡単であろう）．

6) $X \in M_n(K)$ のとき, $\exp X$ は常に正則であって, その逆行列は $\exp(-X)$ で与えられることを示せ.

7) $\mathfrak{o}(n) = \{X \in M_n(\mathbb{R}) \,|\, X + {}^tX = 0\}$ とおく. $\mathfrak{o}(n)$ の元は歪対称行列と呼ばれる. $X \in \mathfrak{o}(n)$ の時, $\exp X \in \mathrm{O}(n)$ であることを示せ. 特に $n = 2$ のとき, $\exp X$ を具体的に求めよ.

8) $\mathfrak{u}(n) = \left\{X \in M_n(\mathbb{C}) \,\middle|\, X + {}^t\bar{X} = 0\right\}$ とおく. $\mathfrak{u}(n)$ の元は歪エルミート行列と呼ばれる. $X \in \mathfrak{u}(n)$ の時, $\exp X \in \mathrm{U}(n)$ であることを示せ.

9) $X \in M_n(K)$ とし, $P = \exp(tX)$ とおく. ただし $t \in \mathbb{R}$ である. ここで, $f : M_n(K) \to M_n(K)$ を $f(Y) = PYP^{-1}$ と定める. f は t に依存するので, $f(Y)$ を改めて $f(t, Y)$ と書き直したとき,

$$\left.\frac{\partial}{\partial t} f(t, Y)\right|_{t=0} = XY - YX$$

であることを示せ. ちなみに, 右辺は通常 $[X, Y]$ あるいは $\mathrm{ad}_X Y$ と表す.