２００４年度数学 II 演習　　　　'04/12/1（水）２時限 (10:40〜12:10)

問１. 次の行列を対角化せよ. また, その際の変換行列を書け. ただし, 固有値が全て実数であるような実行列は実行列で対角化すること.

1) $\begin{pmatrix} -3 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \\ -8 & 6 & 8 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 12 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 55 & 44 & 33 \\ 27 & -12 & 57 \\ -58 & 16 & -76 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & 9\sqrt{2}-1 & 7\sqrt{2}-3 \\ 0 & -3\sqrt{2}+1 & -3\sqrt{2}+3 \\ 0 & \sqrt{2}-1 & \sqrt{2}-3 \end{pmatrix}$ 5) $\begin{pmatrix} 0 & -2 & -2i \\ 1-i & 1-i & 1-i \\ 1-i & 1+i & 1+i \end{pmatrix}$ ここで, $i=\sqrt{-1}$

6) $\begin{pmatrix} 15 & 4 & 0 & -2 \\ -29 & -7 & -1 & 5 \\ 10 & 3 & 1 & -1 \\ 23 & 7 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ 7) $\begin{pmatrix} 2 & -5 & 39 & 5 & -2 \\ 3 & 13 & -42 & 9 & -3 \\ 0 & 2 & -10 & 0 & 0 \\ -1 & -4 & 11 & -4 & 1 \\ 3 & 3 & 8 & 9 & -3 \end{pmatrix}$

問２. $V=\{$ 数列 $\{a_i\}_{i=0}^{\infty} \mid a_i \in \mathbb{C}\}$ とし, その部分空間

$$W=\{\{a_i\}_{i=0}^{\infty} \in V \,|\, a_{i+3}+3a_{i+2}-4a_{i+1}-12a_i=0\}$$

を考える. また, W の元 $\{a_0, a_1, \ldots\}$ に対し, 項をひとつずらした数列 $\{a_1, a_2, \ldots\}$ を対応させる線型写像を $D: W \to W$ とする.

1) D の固有値と固有ベクトルを求めよ.
2) それぞれの固有ベクトルと方程式 $t^3+3t^2-4t-12=0$ の関係について述べよ.

問３. $V=\{$ 高々 3 次の t に関する $\mathbb{C}$ 係数の多項式 $\}$ とし, V から V への写像 T を $T(f)(t)=f(2t-1)$ により定める. （$T(f)$ という多項式を $f(2t-1)$ で定めるという意味である.）

1) T は V の線型変換であることを示せ.
2) 線型変換 T の固有値と固有ベクトルを求めよ.

問４. $\mathbb{C}^2$ 値の C^{∞} 級函数 $f(t)=\begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}$ に関する常微分方程式

$$\frac{df}{dt}(t)=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} f(t),$$

すなわち,

$$\begin{pmatrix} \frac{df_1}{dt}(t) \\ \\ \frac{df_2}{dt}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \\ f_2(t) \end{pmatrix}$$

の一般解は

$$f(t) = \begin{pmatrix} c_1 e^{a_{11}t} \\ c_2 e^{a_{22}t} \end{pmatrix},\ c_1,\ c_2 \text{ は定数}$$

で与えられることを用いて, 常微分方程式

$$\frac{df}{dt}(t) = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ \\ -9 & -7 \end{pmatrix} f(t)$$

を解け.（すなわち, 一般解を求めよ.）

問 5. 正方行列（何次でもよい）A, B であって, 以下の性質を持つものを一組挙げよ.

1) $A + B$ のある固有値で, (A のある固有値) $+$ (B のある固有値) とはならないものが存在する.
2) AB のある固有値で, (A のある固有値) $\cdot$ (B のある固有値) とはならないものが存在する.

ヒント：もちろん $AB \neq BA$ なる A, B の組しか候補にはならない.

問 6. 次に挙げる[1] 線型変換の

1) 固有値・それぞれの固有値に対する固有空間・それぞれの固有空間の次元を求めよ.
2) 対角化可能かどうか判定し, 対角化可能であれば対角化せよ. 即ち, 与えられた線型変換が対角行列で与えられるような基底を一組求めよ.

I) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\quad f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 13 & -7 \\ -5 & 19 & -10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

II) $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2,\quad f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, α は複素定数.

III) $V = \{X \in M_2(\mathbb{C}) \mid \mathrm{tr}X = 0\}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ として,
$f(X) = [E, X] = EX - XE$ （EX や XE は行列として積を取ったもの）
※ この問題については $X \in V$ であれば $f(X) \in V$ であることも示すこと.
ヒント：V は $\mathbb{C}$ 上 3 次元のベクトル空間である.

[1] I) は線型代数演習（齋藤正彦著 東大出版会）から改題