２００４年度数学 II 演習　　　　　　　　　　'04/10/20（水）２時限 (10:40〜12:10)

問１．V を K-線形空間とする．

1) $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ を V の 2 つの基底とし，$\mathcal{E}$ から $\mathcal{E}'$ への基底の変換行列を A とする．このとき，恒等写像 $\mathrm{id}_V : V \to V$ の $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ に関する行列表示を A を用いて表せ．
ヒント：答はやや直感に反するので違和感を持つかもしれない．
2) $f : V \to V$ を K-線型変換とし, V の基底 $\mathcal{E}$ をひとつ固定する．f の $\mathcal{E}$ に関する行列表示を A とするとき，A が正則行列であることと，f が K-線型同型写像であることは同値であることを示せ．
3) $f : V \to V$ を K-線型変換とする．このとき次の３条件が同値であることを示せ．
   i) V の任意の基底 $\mathcal{E}$ に関して f の $\mathcal{E}$ に関する行列表示が正則行列となる．
   ii) V のある基底 $\mathcal{E}$ に関して f の $\mathcal{E}$ に関する行列表示が正則行列となる．
   iii) f は K-線型同型写像である．

問２．2 次の複素正方行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} a_1 + b_1\sqrt{-1} & a_2 + b_2\sqrt{-1} \\ a_3 + b_3\sqrt{-1} & a_4 + b_4\sqrt{-1} \end{pmatrix}, \quad \text{ただし，} \quad a_i, b_i \in \mathbb{R},$$

により定め, $\mathbb{C}$-線形写像 $T_A : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ を $T_A(x) = Ax$ $(x \in \mathbb{C}^2)$ で定める．いま $\mathbb{C}^2$ を $\mathbb{R}$-上の基底 $\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{-1} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{-1} \end{pmatrix} \right\}$ によって $\mathbb{R}$-線形空間とみなすとき，$\mathbb{R}$-線形写像 T_A の基底 $\mathcal{E}$ に関する行列表示を求めよ．

問３．$\mathbb{R}$ を通常の $\mathbb{R}$-線形空間とし，$\mathbb{R}^\times = \{t \in \mathbb{R} \mid t > 0\}$ を

$$\begin{array}{lll} \text{和} & : t, s \in \mathbb{R}^\times \text{ に対し，} t \oplus s = ts & \text{（実数の積），} \\ \text{スカラー倍} & : \lambda \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}^\times \text{ に対し，} \lambda \otimes t = t^\lambda & \text{（実数の冪乗）} \end{array}$$

で定めた $\mathbb{R}$-線形空間とする．また，$\mathbb{R}$-線形写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^\times$ を $f(x) = e^x$ で定める．$\mathbb{R}$ の基底として $\mathcal{E} = \{2\}$, $\mathbb{R}^\times$ の基底として $\mathcal{F} = \{2\}$ をとるとき，f の基底 $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ に関する行列表示を求めよ．
ヒント：「行列」とは言うものの，サイズは 1×1 である．

問 4. V, W を K-線型空間とする．このとき V と W の直和 $V \oplus W$ の部分集合 $\{(v,0)\,|\,v \in V\}$ を V と, $\{(0,w)\,|\,w \in W\}$ を W とそれぞれ同一視する．

1) 上のように $V \subset V \oplus W$, $W \subset V \oplus W$ とみなすと, V, W はそれぞれ $V \oplus W$ の K-線型部分空間となることを示せ.
2) 上のように $V \subset V \oplus W$, $W \subset V \oplus W$ とみなすと, $V \cap W = \{0\}$, $V + W = V \oplus W$ であることを示せ.

注意.

1) 通常は，特に断らなくても問４の方法で V, W は $V \oplus W$ の部分空間とみなす.
2) 問４の 2) から, V と W の, $V \oplus W$ （抽象的な直和）の部分空間としての直和は再び $V \oplus W$ になることが分かる.

問 5. V を n-次元の K-線型空間とするとき, K-線型空間 V^* を

$$V^* = \mathrm{Hom}_K(V, K) = \{f : V \to K\,|\,f \text{ は } K\text{-線型写像}\,\}$$

と定める．ここで,

1) $f_1, f_2 \in V^*$ に対して, $f_1 + f_2 \in V^*$ を $(f_1 + f_2)(v) = f_1(v) + f_2(v)$, $v \in V$,
2) $\lambda \in K$, $f \in V^*$ に対して λf を $(\lambda f)(v) = \lambda f(v)$, $v \in V$

として和・積をそれぞれ定める．但し, それぞれの等式の右辺は K の元（要するに数）としての和や積である.

1) V^* は上の演算で K-線型空間であることを示せ（一回目の問 11 と問 12 の特別な場合）.

ここで, $\mathcal{E} = \{e_1, \cdots, e_n\}$ を V の K-上の基底とする.

2) V から K への K-線型写像（すなわち，$\mathrm{Hom}_K(V, K)$ の元）e_i^* であって，条件

$$e_i^*(e_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

を満たすものが唯一存在することを示せ.

3) $\mathcal{E}^* = \{e_1^*, \cdots, e_n^*\}$ は V^* の K-上の基底をなすことを示せ．したがって V^* は n-次元である.

4) $f : V \to V$ を K-線型変換とする．V^* 上で定まった写像 f^* を $f^*(g) = g \circ f$, $g \in V^*$ と定めると，f^* は V^* から V^* への K-線型写像であることを示せ.

5) f の $\mathcal{E}$ に関する行列表示を A とするとき，f^* の $\mathcal{E}^* = \{e_1^*, \cdots, e_n^*\}$ に関する行列表示を求めよ.