２００４年度数学 II 演習　　　　'04/6/23（水）２時限 (10:40〜12:10)

$K=\mathbb{R}$ もしくは $K=\mathbb{C}$ とする.

問１． 次の置換が偶置換であるか奇置換であるか判定せよ．ただし, $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ について, $\operatorname{sgn}\sigma = 1$ の時 σ は偶置換であると言い, $\operatorname{sgn}\sigma=-1$ の時 σ は奇置換であると言う.

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & k-1 & k & k+1 & \cdots & n-1 & n \\ n-k+2 & n-k+3 & \cdots & n & 1 & 2 & \cdots & n-k & n-k+1 \end{pmatrix}$.

ただし $1 \le k \le n$.

2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ n & n-1 & \cdots & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

問２． n 次正方行列

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ a & 1 & a & \cdots & a \\ a & a & 1 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & a & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

の行列式を計算し, 逆行列を求めよ．ただし $0<a<1$ とする.

定義． V を (K^n とは限らない)K-線型空間とする．但し, $V \neq \{0\}$ とする.

1) V の元 $v_1, v_2, \ldots, v_k$ が K 上一次独立 (線型独立) であるとは,

$$a_1, \cdots, a_k \in K, a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_kv_k = 0 \Longrightarrow a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 0$$

が成り立つことを言う.

2) V の元 $v_1, v_2, \ldots, v_l$ が K 上 V を生成するとは

$$\forall v \in V, \exists a_1, a_2, \ldots, a_k \text{ s.t. } v = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_lv_l$$

なることを言う.

3) V の元 $v_1, v_2, \ldots, v_m$ が K 上の V の基底であるとは, $v_1, v_2, \cdots, v_m$ が K 上一次独立であって, かつ K 上 V を生成することをいう.

注意． 要するに, $V=K^n$ の時の定義をそのまま用いる.

問３． 次のベクトルの組が $\mathbb{R}$ 上一次独立であるか, また与えられた V を生成するか調べよ.

1) $V=\mathbb{R}^3$, $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2) $V=\mathbb{R}^3$, $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3) $V=\mathbb{R}^4$, $v_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}$, $v_2=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\2\end{pmatrix}$, $v_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}$.

4) $V=\mathbb{R}^4$, $v_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}$, $v_2=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\2\end{pmatrix}$, $v_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}$, $v_4=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$, $v_5=\begin{pmatrix}0\\2\\1\\-1\end{pmatrix}$.

5) $V=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\,|\,f$ は C^∞ 級 $\}$, $v_0=1, v_1=t, v_2=t^2$. ここで, 1 で常に 1 であるような定数函数を表す. また, t を実変数とする.

6) $V=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\,|\,f$ は C^∞ 級 $\}$, $v_0=1, v_1=t, v_2=t^2, \ldots, v_n=t^n$. ここで, 1 で常に 1 であるような定数函数を表す. また, t を実変数とする.

7) $V=\{$ 高々n 次の t に関する $\mathbb{R}$ 係数の多項式 $\}$,
$v_0=1, v_1=t, v_2=t^2, \ldots, v_n=t^n$. ここで, 1 で多項式としての 1 を表す.

問 4. $V=\left\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\,\middle|\, f \text{ は } C^\infty \text{ 級であって } \dfrac{df}{dt}=\lambda f \text{を満たす.}\right\}$ とする. ここで t は函数の変数であって, $\lambda\in\mathbb{R}$ である. このとき V の $\mathbb{R}$ 上の基底を求めよ. 必要であれば $\dfrac{df}{dt}=\lambda f$ の一般解は $f(t)=ce^{\lambda t}$, $c\in\mathbb{R}$ で与えられることを用いてよい.

問 5. $V=\left\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\,\middle|\, f \text{ は } C^\infty \text{ 級であって } \dfrac{d^2f}{dt^2}=-f \text{を満たす.}\right\}$ とする. ここで t は函数の変数である.

1) このとき V の $\mathbb{R}$ 上の基底を求めよ. 必要であれば $\dfrac{d^2f}{dt^2}=-f$ の一般解は $f(t)=c_1\cos t+c_2\sin t$, $c_1, c_2\in\mathbb{R}$ で与えられることを用いてよい.

2) 変数は実数のままで, 函数の値としては複素数を許すことにする. つまり $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ とする. このとき $f_1(t)=e^{\sqrt{-1}t}$, $f_2(t)=e^{-\sqrt{-1}t}$ とすると $\{f_1, f_2\}$ は V の $\mathbb{C}$ 上の基底であることを示せ. 必要であれば $e^{\sqrt{-1}t}=\cos t+\sqrt{-1}\sin t$ であることを用いてよい. また, 函数が複素数値であっても一般解は 1) と同様の式 (ただし, $c_1, c_2\in\mathbb{C}$) で与えられることを用いてよい.

問 6. $V=\mathbb{C}^n$ とする. $v_1, v_2\cdots, v_k\in V$ について次を示せ.

1) $v_1, v_2, \ldots, v_k$ が $\mathbb{C}$ 上一次独立であれば $v_1, v_2, \ldots, v_k$ は $\mathbb{R}$ 上一次独立であることを示せ.

2) $v_1, v_2, \ldots, v_k$ が $\mathbb{R}$ 上一次独立であるとする. さらに全ての v_i は $\mathbb{R}^n$ に属するとする. つまり全ての成分が実数であるとする. このとき $v_1, v_2, \ldots, v_k$ は $\mathbb{C}$ 上一次独立であることを示せ.
ヒント：$a_1, \ldots, a_k\in\mathbb{C}$, $a_1v_1+a_2v_2+\cdots+a_kv_k=0$ と仮定する (示したいことは $a_1=a_2=\cdots=a_k=0$ である). この式を実部と虚部に分けてみよ.

3) $v_1, v_2, \ldots, v_k$ が $\mathbb{R}$ 上一次独立であるが, $\mathbb{C}$ 上一次独立でない例を挙げよ.