２００４年度数学 II 演習　　　　　　'04/5/26（水）２時限 (10:40〜12:10)

$K=\mathbb{R}$ もしくは $K=\mathbb{C}$ とする.

問１． $A\in M_{m,n}(K)$ とするとき, $\mathrm{rank}\,A=\mathrm{rank}\,{}^tA$ を示せ.
ヒント：行列の基本行列は基本行列を左右から掛けることに対応するのであった.
また, ${}^t(AB)={}^tB\,{}^tA$ が成り立つのであった.

問２． $A\in M_n(K)$, $b\in K^n$ とする. このとき, 列ベクトル $x\in K^n$ についての一次方程式 $Ax=b$ が任意の b について解を持つための必要十分条件は $A\in \mathrm{GL}(n;K)$ であることを示せ.

問３． 次の方程式において, 解が存在しないような a,b の範囲を平面に図示せよ.
注意：例えば 1) において, $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 4 & b \end{pmatrix}$ がたとえ正則でなくとも方程式が解を持つ可能性があることに注意せよ. 2) も同様.

1) $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 4 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 3 & 1 & b \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$

問４． 次の方程式を解け（目の子で解いてしまっても良いが, ここでは掃き出し法を用いて解く練習をしておくこと）.

1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 5 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 & 4 \\ 6 & 3 & 2 & 8 \\ 1 & 4 & -1 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -8 \\ -3 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 6 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$

注． 具体的な方程式を解く問題は演習ではこれ以上扱わないが, 各自練習しておくこと.

問5．

1) 有理数を成分にもつ正則行列 A に対し, 逆行列 A^{-1} もまた有理数を成分にもつ行列となることを示せ.
2) 正則行列 A とその逆行列 A^{-1} がともに整数を成分にもつ行列であるとき, A の各行（各列）について, その行（列）に含まれる整数たちは互いに素（± 1 のみを公約数にもつ）であることを示せ.
   ヒント：A が 2 次であれば, ユークリッドの互除法の応用である．A のサイズがもっと大きいときはその一般化を考える必要がある．難しければ A は 3 次以下と仮定しても良い.

問6．

1) $A \in M_{m,n}(K)$ とする．このとき $V = \{x \in K^n \mid Ax = 0\}$ とおくと, V は K^n の演算により K-線型空間となることを示せ.
2) $\varphi : K^l \to K^n$ を K-線型写像とする．$\varphi^{-1}(V) = \left\{u \in K^l \,\middle|\, \varphi(u) \in V\right\}$ とおくと, $\varphi^{-1}(V)$ は K-線型空間であることを示せ.
3) 2) において, φ が行列 $B \in M_{n,l}(K)$ で表示されるとすると, $\varphi^{-1}(V) = \left\{u \in K^l \,\middle|\, ABu = 0\right\}$ であることを示せ.

問7． $\psi : K^n \to K^m$ を K-線型写像とする．このとき,

$$W = \psi(K^n) \overset{\text{def}}{=} \{w \in K^m \mid \exists x \in K^n,\ w = \psi(x)\}$$

とおくと, W は K^m の演算により K-線型空間となることを示せ.

問8． $\psi : K^n \to K^m$ を K-線型写像とし, $\Gamma = \{(v, \psi(v)) \mid v \in K^n\}$ とする．ここで, $v \in K^n$ のとき, $(v, \psi(v))$ は形式的に v と $\psi(v)$ を並べて書いたものである.

1) $(v, \psi(v)), (u, \psi(u))$ をそれぞれ Γ の元とするとき,

$$(v, \psi(v)) + (u, \psi(u)) = (v + u, \psi(v) + \psi(u)),$$
$$\lambda(v, \psi(v)) = (\lambda(v), \lambda\psi(v))$$

   と定めると, Γ は K-線型空間になることを示せ.
2) $\pi : \Gamma \to K^n$ を $\pi(v, \psi(v)) = v$ と定めると, π は K-線型同型写像であることを示せ.
   ヒント：逆写像は $v \mapsto (v, \psi(v))$ で与えられる（このことも確かめること）.