２００４年度数学 II 演習　　　'04/5/12（水）２時限 (10:40〜12:10)

$K = \mathbb{R}$ もしくは $K = \mathbb{C}$ とする.

問１． 次の行列の階数（rank）を求めよ.

$$1)\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \quad 2)\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -3 \\ 6 & -4 & 3 \end{pmatrix} \quad 3)\begin{pmatrix} t & s \\ 0 & u \end{pmatrix} \text{但し}, t, s, u \in \mathbb{R}$$

問２． 複素行列の階数を求める際には, 基本変形として「行（列）の複素数倍」「ある行（列）に別な行（列）の複素数倍を加える」「ある行（列）を入れ替える」ことを許すのが普通である. これを踏まえて, 次の行列の階数を求めよ.

$$1)\begin{pmatrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad 2)\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -\sqrt{-1} & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 3)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

問３． 次の行列の逆行列を求めよ.[1]

$$1)\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad 2)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad 3)\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

注． 具体的に与えられた行列の階数や, 逆行列を求める問題（逆行列が存在するかどうかの判定を含む）はここではこれ以上扱わないが, 数をこなすことが熟達への一番かつ唯一の早道なので各自適宜問題を見つけ, 練習をしておくこと.

問４． 線型写像 $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ をそれぞれ

$$\varphi\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+3y \\ -x+y \\ y \end{pmatrix}, \quad \psi\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+z \\ 2x+y-3z \\ x-y \end{pmatrix}$$

により定める. このとき, $\psi \circ \varphi\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を具体的に表示した上で行列表示を求め, さらに φ, ψ の行列表示と比較せよ.

問５． 線型写像 $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ は線型同型写像になりえないことを示せ.
ヒント：講義の真似をしてみよ.

[1] 2) 3) は笠原皓司著 線形代数学（サイエンス社）から採った

問6． $V=K^n, W=K^m$ とし, $f:V\to W$ を K-線型同型写像とする．このとき, f は全単射であることを示せ．すなわち,

i) $\forall w\in W, \exists v\in V$ s.t. $f(v)=w$

ii) $v_1, v_2\in V, f(v_1)=f(v_2)(\in W)\Longrightarrow v_1=v_2$

が成り立つことを示せ（両方示すこと）．

問7． $V=K^n$, $W=K^m$ とする．また, $\varphi:V\to W$ を K-線型写像であって, 更に全単射であるとする．つまり φ は問6の i) ii) の性質を持つとする．このとき, $\varphi^{-1}:W\to V$ を $\varphi^{-1}(w)=(\varphi(v)=w$ となるような唯一の $v)$ と定めると, φ^{-1} は K-線型写像であって, $\varphi^{-1}\circ\varphi=\mathrm{id}_V$, $\varphi\circ\varphi^{-1}=\mathrm{id}_W$ が成り立つことを示せ.
ヒント：実は $V=K^n$, $W=K^m$ であることは全く使わないし, 後半は φ^{-1} の定め方を良く考えれば当たり前である.

問8． $V=W=K^n$ とする．2つの K-線型写像 $\varphi:V\to W$, $\psi:W\to V$ が存在し, $\psi\circ\varphi=\mathrm{id}_V$ であったとすると, $\varphi\circ\psi=\mathrm{id}_W$ であることを示せ.
ヒント：行列に関するどのような命題が対応するか考えてみよ.

問9． A を (m,n) 型の行列, $T\in\mathrm{GL}(m;K)$, $S\in\mathrm{GL}(n;K)$ とする．このとき $\mathrm{rank}\,A=\mathrm{rank}\,TA=\mathrm{rank}\,AS=\mathrm{rank}\,TAS$ であることを示せ.
ヒント：正則行列は基本行列の積として書ける．一方, 基本行列をかけることは基本変形を行うことに対応するのであった.

問10． n 次正方行列 $R(i,j;\lambda)$, $\lambda\in\mathbb{R}$, $i\neq j$ を対角成分がすべて1, (i,j)-成分が λ, その他の成分はすべて0であるようなものとする．記号で書けば

$$R(i,j;\lambda)_{k,l}=\begin{cases}1 & k=l\\ \lambda & (k,l)=(i,j)\\ 0 & \text{その他}\end{cases}$$

であるとする．このとき

1) $R(i,j;\lambda)R(i,j;\mu)$ を計算せよ．また, それを $R(i,j;\lambda)$ の形（をしていればそのよう）に表せ.
2) i,j,λ に依らず $R(i,j;\lambda)$ は正則であることを示し，その逆行列を求めよ.
3) $(i,j)=(l,k)$ でないとき，$R(i,j;\lambda)R(k,l;\mu)R(i,j;\lambda)^{-1}R(k,l;\mu)^{-1}$ を求めよ.

問11． n 次正方行列 $A=(a_{ij})_{i,j}$ は任意の $l>m$ に対し，$a_{lm}=0$ を満たすとする．十分大きな自然数 k に対して $A^k=0$ となるとき，$A^n=0$ であることを示せ.

問 12． X_n を正則でかつ各成分は 0 または 1 であるような n 次正方行列の集合とする．

1) X_2 の元をすべて書き出せ．
2) X_3 の部分集合 Y を $Y = \left\{ A \in X_3 \,\middle|\, A = \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} \right\}$ で定める．このとき Y に属する元の個数を求めよ．
   ヒント：直接数えてもよいし, 1) を使って少し楽をすることも出来る．出来れば二通りの方法で数え上げてみよ．

問 13． $V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid\ C^\infty \text{ 級}\}$ とする．V は函数の和, 函数と実数の積により $\mathbb{R}$-線型空間である．t を函数の変数として, $f \in V$ に対して函数 $\varphi(f)$ を $\varphi(f)(t) = \dfrac{df}{dt}(t)$, また, $g \in V$ に対して $\psi(g)$ を $\psi(g)(t) = \displaystyle\int_0^t g(s)ds$ と定める．

1) φ, ψ はともに V から V への $\mathbb{R}$-線型写像であることを示せ．
2) $\varphi \circ \psi$ は V の恒等写像であるが, $\psi \circ \varphi$ は V の恒等写像でないことを示せ．

ヒント：$\psi \circ \varphi(f) = 0$ なる f を考えてみよ．

問 14．[2] λ を 0 でない実数とする．このとき,

$$V_\lambda = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ C^\infty \text{ 級} \,\middle|\, \frac{df}{dt}(t) = f(t), t \in \mathbb{R} \right\}$$

とする．このとき $V_\lambda = \left\{ ce^{\lambda t} \,\middle|\, c \in \mathbb{R} \right\}$ である．また, V_λ には函数の和と, 実数と函数の積により実線型空間の構造が入る．これらのことを用いて次の問に答えよ．

1) 写像 $\varphi : V_\lambda \to \mathbb{R}$ を $f \in V_\lambda$ に対して $\varphi(f) = f(0)$ と定める．このとき φ は線型写像であることを示せ．
2) φ は線型同型写像であること示せ（線型性は認めてよい）．
3) 写像 $\psi : V_\lambda \to \mathbb{R}$ を $\psi(f) = f(1)$ と定める．このとき, ψ は線型同型写像であることを示せ．また, 写像として ψ と φ は等しくないことを示せ．

・上の 2) から V_λ は $\mathbb{R}$ と線型空間としては「同じ」ように考えてよいことが分かる．しかし, V_λ の元は（函数 0 を除いて）定数でない函数であって, 実数ではないから V_λ は $\mathbb{R}$ とは等しくなりえない．
・また, 上の 2) と 3) から, V_λ を $\mathbb{R}$ と「同じ」とみなす方法が少なくとも 2 通りあることが分かる．したがって, 強引に $V_\lambda = \mathbb{R}$ と書いてしまったとすると, どの方法で

[2] 抽象的な線型空間の一般論は後期で扱うので今の時点では必ずしも完全に理解できなくてもあまり心配しなくてよいが, $V = W$ であることと $V \cong W$ であることは異なるということは認識して欲しい．

「同じ」とみなしているのか不明確である．

4) μ を 0 でない実数とする．写像 $\varphi' : V_\mu \to \mathbb{R}$, $\varphi'(g) = g(0)$ は 1) 2) により線型同型写像である（λ を μ, f を g と書き直したに過ぎない）．そこで，$\tau : V_\lambda \to V_\mu$ を $\tau = (\varphi')^{-1} \circ \varphi$ として定める，すなわち，$f \in V_\lambda$ のとき，$\varphi(f) = f(0)$ は実数であるから，3) により $\varphi'(g) = f(0)$ となる $g \in V_\mu$ が一つだけ存在する．そこでそれを $\tau(f)$ とおく．このとき，τ は $\mathbb{R}$-線型同型写像であることを示せ．

・4) によれば V_λ と V_μ も「同じ」である．が，やはりこれらは $\lambda = \mu$ で無い限り空間としては異なる．したがって $V_\lambda \neq V_\mu$ である．しかし，$\mathbb{R}$-線型空間として扱う分には，τ を通して同じように扱ってよい．このことを V_λ と V_μ は同型であるといい，$V_\lambda \cong V_\mu$ と書く．