Nets of subfactors on the circle

河東泰之 (東大・数理)
目黒区駒場 3–8–1
e-mail: yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp

2001 年 11 月

1 Introduction

これは，R. Longo との共同研究である．

時空領域 O に対応して，作用素環の net $\{M(O)\}$ を考えることは algebraic quantum field theory において昔から研究されてきた．Longo-Rehren [19] は，subfactor の net $\{N(O) \subset M(O)\}$ を組織的に研究することを始めた．特にここでは,「時空」が 1 次元円周 S^1 である場合を考える．そこでの「領域」とは，S^1 の連結開集合で，空でも稠密でもないもののことである．このようなものを単に「区間」という．区間達は有向族をなしていないので "net" という呼び方は不適切だが，しばしばこのように呼ばれている．(これが不満なら，S^1 から「無限遠点」を除去して実軸上の有界開区間を考えることも可能である．詳しくは [15, Appendix] 参照．) $I \mapsto M(I)$ という対応にどういう条件をつけるかはいろいろな設定があるが，ここでは簡単のため一番強い形を考える．すなわち，isotony, conformal invariance, positivity of the energy, locality, vacuum の存在, 既約性, split property, strong additivity を仮定した上，さらに次の条件を考える．(これらの定義についてはたとえば [11] 参照．)

$\bar{I}_1 \cap \bar{I}_3 = \emptyset$ であるような二つの区間 I_1, I_3 を取り，その補集合の連結成分を I_2, I_4 とする．このとき，$M(I_1) \vee M(I_3) \subset M(I_2)' \cap M(I_4)'$ は subfactor を与えるが，この index が有限であることを仮定する．このとき，$\{M(I)\}$ は completely rational であると言う．[15] によって，net $\{M(I)\}$ の既約な DHR sector は有限個しかなく，すべて有限次元である．またこのとき，上の index の値を $\{M(I)\}$ の μ-index と呼ぶ．

すべての $M(I)$ が $\mathbf{C}$ という自明な場合を除いておけば，この状況下で各 $M(I)$ はすべて injective type III_1 factor になり，また，"vacuum vector" Ω はすべての $M(I)$ について，cyclic かつ separating となる．

このような net の例としては，A. Wassermann [24] による，$SU(N)_k$-net, Xu [28, 31] による，orbifold net, coset net などがある．(前者が completely rational であるのは Xu [27] による．また coset net が completely rational であるのは Longo [18] による．) さらに，ここで主に考えるのは，Loke [16] による，Virasoro net であるが，これも以下に見るように，completely rational であることがわかる．

以下 nets of subfactors について考える問題は，completely rational net $\{N(I)\}$ が与えられたときに，その拡張 $\{M(I)\}$ を分類するという問題である．(この時，$N(I) \subset M(I)$ の既約性か有限 index かを仮定する．どちらを仮定しても同じことである．) これは通常の subfactor の分類を区間 I というパラメータ付きで考えたものと言えるだ

が，通常とは別に，環が与えられてその部分環を分類しようとしているのではなく，与えられた net の拡張を分類しようとしていることに注意する．普通の subfactor 理論の設定では，basic construction しても本質的に問題は変わらないので，$N \subset M$ を調べるのと $M \subset M_1$ を調べるのは同じと言っていいが，net 構造があるときはそうではないということが最初の重要なポイントである．つまり，区間 I を固定して subfactor $N(I) \subset M(I)$ を考えてみよう．この subfactor の (dual) canonical endomorphism は，$N(I), M(I)$ のセクターを与えるが，前者は net 全体の DHR sector を与えるのに対し，後者はそうではないのである．この意味で，$\{N(I)\}$ と $\{M(I)\}$ は対称ではなく，部分環を考えるのと拡張を考えるのには違いがあるのである．またこれより，subfactor の net については basic construction はできないこともわかる．また，$\{N(I)\}$ が与えられたとき，その subnet は一般に無限にあるが，拡張の方は有限個しかないことがわかる．Net の μ-index は，DHR sector の system の global index でもあるのだが，$\{N(I) \subset M(I)\}$ に対しては，$\mu_N \geq \mu_M$ であることもわかる．この意味で，net の拡大を考えることが，“quantum symmetry” の方では “subsystem” を考えることに当たっていることになっている．最近 Wassermann-Wenzl や Kirillov-Ostrik [13] のいう “quantum subgroup” もこれとほとんど同じ物を考えている．

このような net の延長 $\{N(I) \subset M(I)\}$ があれば，α-induction によって，“modular invariant” が生じることがわかっているので，上の分類問題は modular invariant の分類問題とも密接に関連していることが分かる．ここで，α-induction とは，Longo-Rehren [19] によって定義された $N(I)$ の DHR endomorphism を $M(I)$ に延長する方法である．(延長したものは，DHR endomorphism とは限らないことに注意する．) これは，Xu [25, 26] によって多くの興味深い性質が明らかになり，さらに [1, 2, 3, 4, 5] によって詳しく研究された．Modular invariant との関連は，[2] に基づき，[4] で明らかにされた．すなわち，Rehren [21] の意味での braiding さえあれば，net 構造はなくても α-induction は定義でき，これによって定まる行列 $Z_{\lambda\mu} = \langle \alpha^+_\lambda, \alpha^-_\mu \rangle$ が，Rehren [21] の意味での S 行列，T 行列と交換するのである．また，この意味での α-induction が，Ocneanu [20] の graphical な方法の拡張になっていることも示された．

$SU(2)_k$ の net については，A. Wassermann の fusion rule の計算より，Rehren の意味での，S 行列，T 行列と，character の変換としての S 行列，T 行列が一致することがわかるので，α-indution から上のようにして生じる modular invariant は Cappelli-Itzykson-Zuber [6], Kato [12] によって分類されたものに一致する．しかも，local net の拡張の状況では，type I と呼ばれる modular invariant しか出ないので，それらは Dynkin 図形，A_n, D_{2n}, E_6, E_8 によって完全に分類されている．[4, 5] でやっていることと [19] の議論をよく見れば，$SU(2)_k$-net の拡張問題は，Dynkin 図形，A_n, D_{2n}, E_6, E_8 によって表 1 のように完全に分類されていることがわかる．(これらの拡張があることは前からわかっていて，これらしかないことも [4, 5] をよく見るとわかるということである．) Kirillov-Ostrik [13] にもほぼ同様の結果がある．ただし一般的な状況では，このように modular invariant の分類と net の延長の分類が完全に一致することは期待できない．

さて以下ここで考えるのは，Virasoro net の拡張の分類である．

level k	Dynkin 図形	内容
$n-1, (n \geq 1)$	A_n	$SU(2)_k$ 自身
$4n-4, (n \geq 2)$	D_{2n}	Simple current extension of index 2
10	E_6	Conformal inclusion $SU(2)_{10} \subset SO(5)_1$
28	E_8	Conformal inclusion $SU(2)_{28} \subset (G_2)_1$

Table 1: Extensions of the $SU(2)_k$ net

2 Virasoro algebras, Virasoro nets, and their modular invariants

まず，Virasoro net と対応する modular invariant の分類について知られていることの復習から始めよう．Virasoro net に対応するものは，conformal field theory では minimal models と言われている．

Loke [16] は，$\mathrm{Diff}(S^1)$ の表現の離散列を用いて，central charge $c = 1-6/m(m+1)$, $(m = 2,3,4,\ldots)$ の net $\{M(I)\}$ を構成した．これは，同じ central charge での Virasoro algebra の unitary 表現から作られている．(なお，central charge が 1 未満のときは，この値にしか Virasoro algebra の unitary 表現はないというのが有名な Friedan-Qui-Shenker [8] の結果である．この値での unitary 表現の実現は，Goddard-Kent-Olive [9] による．) 次にこのような central charge の値に対して，character たちは，(p,q), $1 \leq p \leq m-1$, $1 \leq q \leq m$ という対に $(p,q) = (m-p, m+1-q)$ という同一視を入れたもので表されることがわかっている．Loke [16] の構成によってこれらの character は net $\{M(I)\}$ の既約な DHR sectors $[\lambda_{(p,q)}]$ と 1 対 1 に対応している．さらに彼はこれらの fusion rule を計算して次のようになることを示した．

$$[\lambda_{(p,q)}][\lambda_{(p',q')}] = \bigotimes_{r=|p-p'|+1, r+p+p':\mathrm{odd}}^{\min(p+p'-1, 2m-p-p'-1)} \bigotimes_{s=|q-q'|+1, s+q+q':\mathrm{odd}}^{\min(q+q'-1, 2(m+1)-q-q'-1)} [\lambda_{(r,s)}] \tag{1}$$

これは character の fusion rule と一致している．また，character (p,q) に対して spin が

$$h_{p,q} = \frac{((m+1)p - mq)^2 - 1}{4m(m+1)}. \tag{2}$$

で与えられることもわかっていて，これより Guido-Longo [11] の spin-statistics theorem によって DHR sector $\lambda_{(p,q)}$ の statistics phase は，$\exp(2\pi i h_{p,q})$ であたえられる．これらを合わせて，character に対する，Kac-Petersen の S 行列，T 行列と，DHR sector $\{\lambda_{(p,q)}\}$ から Rehren [21] のようにして生じる S 行列，T 行列は同じ物であることがわかる．

一方，Goddard-Kent-Olive [9] の coset construction から見ると，central charge が $c = 1-6/m(m+1)$ のときの上の net と，Xu [28] のようにして，diagonal embedding $SU(2)_{m-1} \subset SU(2)_{m-2} \times SU(2)_1$ から作った coset net が同型であることが期待される．これが示せれば，Virasoro net が completely rational であることが Longo [18] によってわかるのである．このことの証明は次のように行う

1. Diffeomorphism 不変な net は同じ central charge の Virasoro net を既約な subnet として含む．

2. Virasoro net が rational なことより，その index は有限である．

3. Virasoro net は completely rational である．

4. Xu の計算した coset net の μ-index と Virasoro net の S 行列から計算した μ-index は等しい．

5. [15] の結果より index は 1 である．

さて次に modular invariant である．Cappelli-Itzykson-Zuber [6] によって，分類がなされており，各行列は Dynkin 図形の組によってラベルがつけられている．今，我々に関係あるのは type I と呼ばれるものだけなので，それについて central charge $c = 1 - 6/m(m+1) < 1$, $m = 2, 3, 4, \ldots$ のときの [6] による分類を表 2 に掲げる．

m	Labels for Z
n	(A_{n-1}, A_n)
$4n+1$	(A_{4n}, D_{2n+2})
$4n+2$	(D_{2n+2}, A_{4n+2})
11	(A_{10}, E_6)
12	(E_6, A_{12})
29	(A_{28}, E_8)
30	(E_8, A_{30})

Table 2: Type I modular invariant for the Virasoro nets

目標はこれらが，Virasoro net の延長の分類とと 1 対 1 に対応していることを示すことである．まず，dual canonical endomorphism はこれらの modular invariant の vacuum block に対応していないといけないので大幅な制限がつく．このあと，(A, A) 型のときは index 1 で何の問題もないので次に，(A, D) 型，(D, A) 型の場合を考える．このときは index 2 の simple current extension を考えればよく，spin を調べることによって実現可能であることと一意であることが簡単に分かる．

最後に残るのが，(A, E) 型，(E, A) 型の 4 つである．このときは次のように処理する．

1. Fusion rule から A 型の fusion rule subalgebra を含んでいることがわかる．

2. A 型の connection は一意的なので，$SU(2)_k$ の時と同じ Q-system が作れる．

3. Longo-Rehren [19] によって，locality を無視すれば net の延長ができる．(Spin が通常の $SU(2)_k$ と違っているので，単に「$SU(2)_k$ と同じ」ではすまない．)

4. Local でなくても α-induction によって modular invariant はできている．

5. Modular invariant の分類表を見れば，同じ central charge のところでは，Trace が違うので，Q-system から，M-N sector の数を数えて正しいものが決定できる．

6. Böckenhauer-Evans [3, Proposition 3.2] によって，locality が成立していることがわかる．

これによって分類が完成する．

また，同様の構成によって type II の modular invariant も local でない延長によって実現できている．

また，固定した区間 I についてできている subfactor $N(I) \subset M(I)$ は Virasoro net のときも，$SU(2)_k$ のときと同じく，Goodman-de la Harpe-Jones subfactor [10] である．

3 Applications

分類の応用を幾つか述べる．まず，上で述べたことより，diffeomorphism 不変な net はすべて Virasoro net の延長になっているので central charge が 1 未満であれば，上の分類定理が適用できる．

たとえば，Xu は，[30, Section 3.7] で，central charge 4/5 を持つ 3 つの coset net $SU(2)_8 \subset SU(3)_2$, $SU(3)_2 \subset SU(3)_1 \times SU(3)_1$, $U(1)_6 \subset SU(2)_3$ を考えた．彼は，3 つとも 6 つの既約な DHR sector を持ち，同じ 3 次元 TQFT を与えることを示したが，実際には上の結果によって 3 つとも net として同型であることがわかる．これらはすべて，central charge 4/5 の Virasoro net の simple current extension である．

分類表のうち，(E_6, A_{12}), (E_8, A_{30}) の二つに対しては，Böckenhauer-Evans [1, Subsection 5.2] にあるように，延長は coset として書けるのではないかという明らかな期待がある．すなわち，$SU(2)_{11} \subset SO(5)_1 \times SU(2)_1$ と $SU(2)_{29} \subset (G_2)_1 \times SU(2)_1$ であるが，[1, Subsection 5.2] ではこれが実際に期待される延長であることを示せず，「これが延長だったら」という仮定のもとで α-induction を論じている．(また例外型の残りの二つ，(A_{10}, E_6), (A_{28}, E_8) については [1] では単に “there is no such natural canidate” と書かれている．) 以下，上の分類の応用として，これらが正しい延長であることを示す．これらが Virasoro net の local extension であること自体は明らかなのだが，問題は index が 1 で，Virasoro net に一致してしまうかもしれないということである．(E_6, A_{12}) については次のように議論を進める．

1. 2 つの coset に対応する commuting square により，cofiniteness の index の下からの評価を得る．

2. Rehren の canonical tensor product subfactor の結果 [22, 23] を用いて同じ index の可能性を 3 つに絞る．

3. [15] の μ-index の評価と，Virasoro net の拡張の分類定理からも同じ index の可能性が 2 つに絞られる．

4. 上の 3 つの制限を満たす index の値は一つしかない．

5. このとき，延長は modular invariant は (E_6, A_{12}) を与える．

(E_8, A_{30}) についてもほぼ同様の論法が適用できる．

References

[1] J. Böckenhauer & D. E. Evans, *Modular invariants, graphs and α-induction for nets of subfactors II*, Commun. Math. Phys. **200** (1999) 57–103.

[2] J. Böckenhauer & D. E. Evans, *Modular invariants, graphs and α-induction for nets of subfactors. III*, Commun. Math. Phys. **205** (1999) 183–228.

[3] J. Böckenhauer & D. E. Evans, *Modular invariants from subfactors: Type I coupling matrices and intermediate subfactors*, Commun. Math. Phys. **213** (2000) 267–289.

[4] J. Böckenhauer, D. E. Evans & Y. Kawahigashi, *On α-induction, chiral projectors and modular invariants for subfactors*, Commun. Math. Phys. **208** (1999) 429–487.

[5] J. Böckenhauer, D. E. Evans, Y. Kawahigashi, *Chiral structure of modular invariants for subfactors*, Commun. Math. Phys. **210** (2000) 733–784.

[6] A. Cappelli, C. Itzykson & J.-B. and Zuber, *The A-D-E classification of minimal and $A_1^{(1)}$ conformal invariant theories*, Commun. Math. Phys. **113** (1987) 1–26.

[7] P. Di Francesco, P. Mathieu & D. Sénéchal, "Conformal field theory", Springer-Verlag, 1996.

[8] D. Friedan, Z. Qui & S. Shenker, *Conformal invariance, unitarity and critical exponents in two dimensions*, Phys. Rev. Lett. **52** (1984) 1575–1578.

[9] P. Goddard, A. Kent, & D. Olive, *Unitary representations of the Virasoro and super-Virasoro algebras*, Commun. Math. Phys. **103** (1986) 105–119.

[10] F. Goodman, P. de la Harpe, & V. F. R. Jones, "Coxeter graphs and towers of algebras" MSRI Publications, Springer, **14**, 1989.

[11] D. Guido & R. Longo, *The conformal spin and statistics theorem*, Commun. Math. Phys. **181** (1996) 11–35.

[12] A. Kato, *Classification of modular invariant partition functions in two dimensions*, Modern Phys. Lett **A 2** (1987) 585–600.

[13] A. Kirillov Jr. & V. Ostrik, *On q-analog of McKay correspondence and ADE classification of $sl^{(2)}$ conformal field theories*, preprint 2001, math.QA/0101219.

[14] M. Izumi, R. Longo & S. Popa *A Galois correspondence for compact groups of automorphisms of von Neumann algebras with a generalization to Kac algebras*, J. Funct. Anal. **10**, (1998) 25–63.

[15] Y. Kawahigashi, R. Longo & M. Müger, *Multi-interval subfactors and modularity of representations in conformal field theory*, Commun. Math. Phys. **219** (2001) 631–669.

[16] T. Loke, *Operator algebras and conformal field theory of the discrete series representations of Diff(S^1)*, Thesis, University of Cambridge, 1994.

[17] R. Longo, *A duality for Hopf algebras and for subfactors*, Commun. Math. Phys. **159** (1994) 133–150.

[18] R. Longo, *Conformal subnets and intermediate subfactors*, preprint 2001, math.OA/0102196.

[19] R. Longo & K.-H. Rehren, *Nets of subfactors*, Rev. Math. Phys. **7** (1995) 567–597.

[20] A. Ocneanu, *Paths on Coxeter diagrams: from Platonic solids and singularities to minimal models and subfactors*, (Notes recorded by S. Goto), in *Lectures on operator theory*, (ed. B. V. Rajarama Bhat et al.), The Fields Institute Monographs, AMS Publications, 2000, 243–323.

[21] K.-H. Rehren, *Braid group statistics and their superselection rules*, in: "The Algebraic Theory of Superselection Sectors", D. Kastler ed., World Scientific 1990.

[22] K.-H. Rehren, *Chiral observables and modular invariants*, Commun. Math. Phys. **208** (2000) 689–712.

[23] K.-H. Rehren, *Canonical tensor product subfactors*, Commun. Math. Phys. **211** (2000) 395–406.

[24] A. Wassermann, *Operator algebras and conformal field theory III: Fusion of positive energy representations of $SU(N)$ using bounded operators*, Invent. Math. **133** (1998) 467–538.

[25] F. Xu, *New braided endomorphisms from conformal inclusions*, Commun. Math. Phys. **192** (1998) 347–403.

[26] F. Xu, *Applications of braided endomorphisms from conformal inclusions*, Internat. Math. Res. Notices (1998) 5–23.

[27] F. Xu, *Jones-Wassermann subfactors for disconnected intervals*, Commun. Contemp. Math. **2** (2000) 307–347.

[28] F. Xu, *Algebraic coset conformal field theories I*, Commun. Math. Phys. **211** (2000) 1–44.

[29] F. Xu, *On a conjecture of Kac-Wakimoto*, Publ. RIMS, Kyoto Univ. **37** (2001) 165–190.

[30] F. Xu, *3-manifold invariants from cosets*, preprint 1999, math.GT/9907077.

[31] F. Xu, *Algebraic orbifold conformal field theories*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **97** (2000) 14069–14073.