# 1999 年度数学 IV・期末テスト略解解説

2000 年 2 月 22 日
河東泰之 (かわひがしやすゆき)
数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)
e-mail: yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
ホームページ:http://kyokan.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

配点は順に 25, 20, 20, 20, 20 点の 105 点満点です．この点数 $x_2$ が上に赤で書いてあります．中間テストの点数を $x_1$ とすると，最終成績 $x$ は前に予告したとおり，$x = 0.3\max(x_1, x_2) + 0.7x_2$ として計算します．(100 点を超えたら 100 点で頭打ちです.) これが青で書いてある点数で，教務課に報告されるものです．採点ミスがあると思う人は，ただちに申し出て下さい．(返却する答案は，すべてコピーが取ってあります．)

期末テスト自体の最高点は 105 点 (2 人)，平均点は 67.6 点，その得点の分布は次のとおりです．

| 0–49 (点) | 50–59 | 60–69 | 70–79 | 80–89 | 90–99 | 100–105 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 14 (人) | 10 | 12 | 18 | 7 | 10 | 5 |

最終成績 (青い数字) の平均点は 71.4 点，その得点の分布は次のとおりです．

| 0–49 (点) | 50–59 | 60–69 | 70–79 | 80–89 | 90–99 | 100 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 9(人) | 7 | 10 | 26 | 6 | 13 | 5 |

以下略解と解説です．

[1] これは普通の方法でやるだけです．答え (の一例) は，次のとおりです．

$$\begin{pmatrix} -2 & -3 & 9 \\ 1 & 2 & -5 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -8 & -10 & 31 \\ -2 & 3 & 2 \\ -3 & -2 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

[2] これも普通にやれば，楕円 $4(x-1)^2 + y^2 = 1$ を $\pi/4$ 回転したものであることがわかります．図は省略しますが，$x$ 軸，$y$ 軸とはそれぞれ 2 点で交わっています．交わっていなかったり，接していたりする図は減点です．

[3] まず，$x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = 0$ の解が重根 2 と単根 1 であることから，$f(t) = (at+b)e^{2t} + ce^t$ が一般の解の形です．条件より，$a = 0, b = 0, c = 1$ となって，答えは $f(t) = e^t$ です．

[4] これは簡単にすぐ解いている人もたくさんいましたが，問題の意味を誤解して苦しんでいる人もかなりいて,「問題がおかしい」という文句もいくつかあったのでまずそこから説明します.

問題の漸化式で $a, b$ が決まっていたとしても，初期値 $x_1, x_2, x_3$ の取り方によって，いろいろな解がありうるわけです．問題で言っている条件は，そのいろいろな解の中に $n$ の一次式で表されるものがある，ということです．この条件から以下のように，$a, b$ の値が定まります．後半部では，この $a, b$ に対し，指定の初期値の元で漸化式を解け，というもので，こちらは「いろいろな解」の中で上とは別のものを要求しているので，こちらの答えが $n$ の一次式にならなくても (というか，最初の 3 項を見ただけで明らかに一次式になりませんが) 問題はありません.

まず前半ですが，$t^3-4t^2+at+b=0$ が $t=1$ を重根として持つことを使うか，あるいは単に $x_n = cn+d$ とおいて漸化式に代入するかします．これより，$a=5, b=-2$ がわかります．後半は普通の方法で係数を決めて，$x_n = n+2^n$ となります.

[5] 一番「ずるい」方法では,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

としたとき，$A = B^3$ であることに気づけばすぐに,

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 3n & 3n(3n-1)/2 \\ 0 & 1 & 3n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

が求まります．普通の方法でも，固有値が 1 (3 重根) であることはすぐにわかるので，Jordan 標準型に直すか，または Cayley-Hamilton の定理を使って，$t^n$ を $(t-1)^3$ で割ったあまりを求めても比較的簡単にできます.