

数学 IV ・ 中間テストの解答 ・ 解説

1998 年 1 月 9 日

河東泰之

配点は，[1] から順に 15, 20, 15, 20, 30 点です．

平均点は，61.5 点で次のような得点分布でした．返す答案はコピーが取ってあります

0-49 (点)	50-59	60-69	70-79	80-89	90-99	100
27(人)	14	13	15	13	7	11

言うまでもないことだと思っておりましたが，答案に答しか書いてない人が何人かいましたので，ここで書いておきます．数学の答案は，当然，途中の経過を書くものです．答だけでは，カンニングしたのかもしれないし，間違った方法でたまたま答が合ったのかもしれませんが，[1] については機械的に公式に入れるだけなので，答だけでも満点をつけましたが，他の問題では大幅に減点しました．

[1] 逆行列は

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -4 & 3 & -2 \\ -11 & 8 & -5 \end{pmatrix}$$

である．

これは単純な計算問題で，検算も簡単なので，1ヶ所でも数字が違っていれば 0 点です．

[2] $\det A = 4t^3 - 12t + 8 = 0$ を解くと， $t = 1, -2$ を得る．このうち A の rank が 2 なのは $t = -2$ の方である．このとき， $Ax = 0$ となる x は， $\begin{pmatrix} 2s \\ s \\ -2s \end{pmatrix}$ の形のもの

全体 (s は実数) である．

$t = -2$ までで 10 点です．

[3] 1 列目と 2 列目を加えると 3 列目になっているので，つねに $\det A = 0$ であり， A は 0 行列ではないので， A の rank は 1 か 2 のいずれかである．Rank が 1 になるのは， A を縦に区切った 3 本の縦ベクトルがすべて平行になるときで，これは $t = 1$ のときである．その他のときは rank は 2 である．

「 A は 0 行列ではないから rank は 0 ではない」というのが抜けていると 1 点減点です．

[4] $\det(tI - A) = t^3 + t^2 + 15at$ だから，これを $f(t)$ とおいて， $f(t) = 0$ が 2 重根を持つようにパラメータ a の値を定めればよい． $f'(t) = 3t^2 + 2t + 15a$ だから， $f(t) = f'(t) = 0$ を解いて， $(t, a) = (0, 0), (-1/2, 1/60)$ の 2 組の解を得る．どちらの場合も $\det(tI - A) = 0$ の解は実際に 2 重根と他の 1 根になっているので答えは $a = 0, 1/60$ である．

$\det(tI-A)$ の計算を間違えた人は, (特に惜しい人以外は) 0 点です. $a = 0, a = 1/60$ のそれぞれに 10 点です.

[5] まず A の固有値を求めると $2t^3 - 3t^2 + t = 0$ を解いて $1, 1/2, 0$ となる. この 3 根はすべて異なるので A は対角化できて,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 10 & 3 \\ 2 & -3 & -1 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

となる. これより,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 10 & 3 \\ 2 & -3 & -1 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 10 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -10 & 20 & 6 \end{pmatrix}$$

を得る.

固有値が求まっただけだと 3 点です.