1998 年度理科 II, III 類 1 年生 数学 IA 期末テスト

1998 年 9 月 8 日・河東泰之
数理科学研究科棟 310 号室 (電話 5465-7024)
e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
homepage http://kyokan.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

試験は 90 分で，自筆ノート持ち込み可 (本や，人のノートのコピーは不可) で行います．問題は 6 題ありますが，4 題選んで解いてください．配点はどの問題も同じです．5 題以上解いた場合は点数のよい方から 4 題分の合計点を試験の点数とします．

[1] 次の関数の極値を求めよ．ただし，$x, y \in \mathbf{R}$ である．

$$f(x,y) = 2x^3 + 3x^2y - 6xy^2 + 3y^3 - 3x^2.$$

[2] 次の重積分の値を求めよ．

$$\int_D dx\,dy, \qquad D = \{(x,y) \mid (x^2+y^2)^2 \le 4(x^2-y^2)\}.$$

[3] 2 つの実数列 $\{a_n\}_n, \{b_n\}_n$が次の条件を満たしているとする．
(1) すべての n について，$b_n < b_{n+1}$.
(2) $\sup_n b_n = \infty$.
(3) 極限 $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}$ は存在して有限の実数αに等しい．
このとき，$\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$ も存在してαに等しいことを示せ．

[4] 次のすべての条件を満たす $\mathbf{R}$ 上の実数値関数 $f(x)$ は存在するか．もし存在するなら，例を挙げて説明せよ．存在しないならば，存在しないことを証明せよ．
(1) $f(x)$ は $\mathbf{R}$ 上一様連続である．
(2) $f(x)$ は $\mathbf{R}$ 上微分可能である．
(3) 集合 $\{f'(x) \mid x \in \mathbf{R}\}$ は有界ではない．

[5] 次の重積分の値を求めよ．
(1) $\displaystyle\int_0^1 \int_{x/10}^{x} \sqrt{xy - y^2}\,dy\,dx + \int_1^{10} \int_{x/10}^{1} \sqrt{xy - y^2}\,dy\,dx.$
(2) $\displaystyle\int_D \sqrt{4x^2 - y^2}\,dx\,dy, \qquad D = \{(x,y) \mid 0 \le y \le x \le 1\}.$

[6] $-1 < x < 1$ とするとき，$f(x) = \log \dfrac{1+x^2}{1-x^2}$ を Taylor 展開せよ．そのべき級数が $f(x)$ に収束していることをきちんと示すこと．