1998 年度理科 II, III 類 1 年生 数学 IA 演習・小テスト (14)

1998 年 7 月 21 日・河東泰之
数理科学研究科棟 310 号室 (電話 5465-7024)
e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
homepage http://kyokan.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

答案の一番上に氏名と学生証番号を書いてください．(組は書かなくてもけっこうです．) 自分のノートを参照してもけっこうです.

[1] 次の重積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_D (px^2+qy^2)\,dx\,dy, \quad D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1\}$.

(2) $\displaystyle\int_{\mathbf{R}^2} (x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)^2}\,dx\,dy$.

(3) $\displaystyle\int_D \sin(x+y)\,dx\,dy, \quad D=\{(x,y)\mid x\ge 0, y\ge 0, x+y\le \pi/2\}$.

[2] $f(x)$ は $\mathbf{R}$ 上の連続微分可能な関数とする．$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1\}$ としたとき,

$$\int_D f'(x^2+y^2)\,dx\,dy = \pi(f(1)-f(0))$$

であることを示せ.

[3] $p,q>0$ とする.

$$B(p,q)=2\int_0^{\pi/2}\cos^{2p-1}\theta\sin^{2q-1}\theta\,d\theta,$$
$$\Gamma(p)=\int_0^{\infty} e^{-x}x^{p-1}\,dx$$

とおく.

(1) $\Gamma(p)$ の右辺の広義積分は収束していることを示せ.

(2) $B(p,q)=\dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$ を示せ.