1998 年度理科 II, III 類 1 年生 数学 IA 演習・小テスト (7) 解説

1998 年 6 月 5 日・河東泰之
数理科学研究科棟 310 号室 (電話 5465-7024)
e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
homepage http://kyokan.ms.u-tokyo.ac.jp/˜yasuyuki/

配点は [1] から順に 10×4, 15×2, 30 点です．平均点は 44.6 点，最高は 100 点 (6 人) でした．今回は易しめにしたつもりなんですが，平均はあまり変わりませんでした．

略解は次のとおりです．(実際の答案ではもっと説明が要ります．また，[1] (1), (4) [2] (2) ではもちろん他にもたくさん例はあります．)

[1] (1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n}$.

(2) ∞.

(3) 1.

(4) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^n z^n$.

[2] (1)

$$\begin{aligned}
1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2} &< 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{n(n-1)} \\
&= 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) \\
&= 2 - \frac{1}{n} < 2
\end{aligned}$$

なので収束.

あるいは，$1 + \displaystyle\int_1^n \frac{1}{x^2}\, dx$ と比べると言うのも有名です．積分は授業ではまだやっていませんが，これも O.K. にしてあります.

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$.

これは (1) が露骨な誘導ですね．もちろん他にも答はありますが.

[3] $p(n) = 0$ となる n は有限個しかないから，$p(n) \neq 0$ となる項についてだけ考えればよい．$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{|p(n)|}{|p(n+1)|} = 1$ であるので，5 月 26 日の授業でやったことより $|z| < 1$ で収束，$|z| > 1$ で発散がわかる．よって，収束半径は 1.

もちろん，Cauchy-Hadamard でもできますが，上のようにした方が簡単です.