数学ＩＡ (理科Ｉ類 17,18,27,28 組) 前期期末テスト

1994 年 9 月　河東泰之

この試験は自筆ノート持ち込み可で行います.

[1] 関数列 $\{\dfrac{x}{1+nx}\}_{n=1,2,3,\ldots}$は，$[0,\infty)$ 上で一様収束しているか？　証明付きで答えよ.

[2] $x \geq 0$ に対し,

$$1+\frac{3}{2}x+\frac{3}{8}x^2-\frac{1}{16}x^3 \leq (1+x)^{3/2} \leq 1+\frac{3}{2}x+\frac{3}{8}x^2$$

を証明せよ.

[3] $x, y \in \mathbf{R}$ の C^2級関数 $f(x,y)$ が，すべての実数 t に対して $f(tx,ty)=t^k f(x,y)$ を満たしているとする.（ただし，kは自然数である.）このとき,

$$x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x,y)+2xy\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}f(x,y)+y^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}f(x,y)=k(k-1)f(x,y)$$

であることを証明せよ.

[4] $x, y \in \mathbf{R}$ の関数 $f(x,y)=(2x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}$の極値をすべて求めよ.

5 番は，下記の [5A], [5B] のうちいずれか一問を選択して答えよ.

[5A] (A,B) を有理数の切断とする．このとき，任意の正の有理数rに対し，$a \in A$ と $b \in B$ が，$0<b-a<r$となるように取れることを証明せよ.

（注意：これは実数を構成する段階での問題なので，実数の性質は使わず，切断の定義と有理数の性質だけから証明すること．— 例えば実数の足し算，引き算は使ってはいけない. —)

[5B] 二つの実数列 $\{a_n\}_{n=1,2,3\ldots}$ と $\{b_n\}_{n=1,2,3\ldots}$に対し，$n<m$ のとき常に，$a_n \leq a_m < b_m \leq b_n$が成立しており，また $\lim_{n\to\infty}|a_n-b_n|=0$ とする．このときすべての区間 $[a_n,b_n]$, $(n=1,2,3,\ldots)$ に共通に含まれる実数が一つだけ存在することを証明せよ.