Paragroup 入門

河東泰之（東大・理・数学）

§0 Introduction

Jones による index 理論の創始[J] に始まる subfactor の分類理論は，link invariant, quantum group, conformal field theory などとの多くの予想外の発展を生みだし，短期間に作用素環論の中心理論の一つになった．ここでは，subfactor から発生した，Ocneanu による paragroup 理論のやさしい解説を目指すことにする．

まず，factor, subfactor のペア，$N \subset M$を考える．この Nの "入り方" を調べることが，subfactor 理論の目的である．すなわち，Mの automorphism αに対し，$N \subset M$は$\alpha(N) \subset M$ に conjugate であるといい，この conjugacy で subfactor を分類したいわけである．さらに，勝手に factor を取ると，分類は難しすぎて絶望的なので，通常，approximately finite dimensional（略して AFD, また hyperfinite ともいわれる）というクラスに限る．（AFD であることを仮定しなくても一般論は相当に展開できるが.）さらにここでは，II_1型，というもっとも基本的な場合に限ることにする．

Ocneanu の基本的なアイディアは，体と部分体に関する Galois 理論の類似を factor, subfactor のペアについて考えることであった．その結果，現われる量子化された Galois 群とでもいうべきものを Ocneanu は，paragroup と名付けたのである．これはグラフをある種の構造込みで考えるもので，有限グラフをコンパクト多様体の離散的なモデルと見なすことにより，この構造は，ちょうど微分幾何の flat connection に対応していることがわかる．また，可解格子模型とも非常にきれいな類似性があることがわかる．これらは，Ocneanu によって 1987 年にアナウンスされたものだが，彼は証明の細部をまったく発表しないため，多くの点が不明のまま残されてきた．ここでは，この paragroup 理論の基礎を解

説する．基本的な文献は，彼のアナウンス[O1]，講演ノート[O2]，講義録[O3] である．

§1 基礎の復習

まず，基本的な結果を[J], [GHJ], [P1] などからまとめておく．Subfactor $N \subset M$を取る．この時，無限次元環 Mの Nに対する相対的なサイズを測る実数として導入されたのが，Jones index である．この値が，$\{4\cos^2(\pi/n) \mid n = 3, 4, 5, \cdots\} \cap [4, \infty]$ に限られ，またこれらの値がすべて実現できる，というのが Jones の最初の大きな結果であった．この状況で，Jones は Jones projection と呼ばれる projection e_1を導入して，新しい大きな環 $M_1 = \langle M, e_1\rangle$ を構成した．この時，subfactor $M \subset M_1$ は，$N \subset M$と同じ index を持ち，適当な意味で，dual な subfactor になっている．この構成を Jones の basic construction という．さらに，これを繰り返すことにより，Jones tower

$$N \subset M \subset M_1 \subset M_2 \subset M_3 \subset \cdots$$

ができる．逆に，N内に，projection の列，$e_{-1}, e_{-2}, e_{-3}, \ldots$ を選び，下向きの basic construction で tunnel

$$M \supset N \supset N_1 \supset N_2 \supset N_3 \supset \cdots$$

を作ることもできる．この時，relative commutant の tower

$$N \cap N' \subset M \cap N' \subset M_1 \cap N' \subset M_2 \cap N' \subset M_3 \cap N' \subset \cdots$$

または，

$$N \cap N' \subset N \cap N_1' \subset N \cap N_2' \subset N \cap N_3' \subset N \cap N_4' \subset \cdots$$

を考えることが大事である.（これら二つは互いに anti-isomorphic である.）これは，有限次元環の増大列になるのでその Bratteli diagram を考

えることができる．すると，その各段階は，前段階の “折り返し” プラス新しい部分，となっていることがわかる．この “新しい部分” だけを考えたものを principal graph と呼ぶ．この principal graph が，有限の時，すなわち relative commutant の tower の Bratteli diagram がある段階からはすべて前の段階の折り返しになっているとき，subfactor は，finite depth を持つ，という．ここで depth は，そのグラフの最初の点（$*$で表す）からの最大距離のことである．Jones index の平方根が，この principal graph の Perron-Frobenius 固有値と等しいことがすぐにわかる．これと古くから知られている結果とをあわせると index が 4 未満の時は，principal graph は，A_n, D_n, E_6, E_7, E_8のいずれかの Dynkin diagram に等しいことがわかる．

一方，上の tunnel から作った relative commutant の tower が，もとの subfactor を生成するか，という問題が重要な問題として考えられてきた．まず，Ocneanu は，[P1] で，$N' \cap M = \mathbf{C}$ かつ finite depth の時にこれが適当な tunnel の選び方に対して成り立つことをアナウンスした．しかし，彼の証明は未だに発表されていない．これに対し，Popa は，$N' \cap M = \mathbf{C}$ という仮定無しで証明できることを[P1] で示し，さらに[P2] でこの方向での最終的な結果をアナウンスしている．そこで，subfactor を分類するには，上のような relative commutant の tower を分類すればよいわけである．この tower の combinatorial な特徴づけを与えるのが Ocneanu の paragroup である．

最後に commuting square の定義を与えておく．4 つの von Neumann 環（以下で考えるのはすべて有限次元）A, B, C, Dで

$$\begin{array}{ccc} A & \subset & B \\ \cap & & \cap \\ C & \subset & D \end{array}$$

となっているものを考えよう．環 D上のトレース tr を考え，ほかの環上では，この tr の制限を考える．ここで条件 $i_{A\to B} \cdot E_A = E_B \cdot i_{C\to D}$が

C上で成り立っているときこの4つは commuting square を成すという．（ここで，i は，いずれも inclusion を意味する．）以下，この概念が非常に重要である．

§2 Basic construction, Jones projection と connection

Finite index, finite depth をもつ AFD II_1型の subfactor $N \subset M$を取る．この時，Popa のいう canonical commuting squares

$$\begin{array}{ccccccccc} N \cap N' & \subset & N \cap N_1' & \subset & N \cap N_2' & \subset & N \cap N_3' & \subset & \cdots \\ \bigcap & & \bigcap & & \bigcap & & \bigcap & & \\ M \cap N' & \subset & M \cap N_1' & \subset & M \cap N_2' & \subset & M \cap N_3' & \subset & \cdots \end{array}$$

を考えよう．Popa の意味で generating な tunnel $(N_n)_n$を選ぶことにより，上の第一列，第二列はそれぞれ，N, Mに近づくとしてよい．この Bratteli diagram を見れば，それは4つのグラフ $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$が

$$\begin{array}{ccc} \cdot & \xrightarrow{\mathcal{G}_1} & \cdot \\ {\scriptstyle \mathcal{G}_2}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathcal{H}_1} \\ \cdot & \xrightarrow[\mathcal{H}_2]{} & \cdot \end{array}$$

の形に結びついたものを右に次々倒していったものからできていることがすぐにわかる．また，$\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$はグラフとして同じで，ともに principal graph に等しいこと，$\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$もともに等しく，“dual” principal graph に一致することもわかる．(たとえば，[P1] の§6 を見よ．）今，finite depth を仮定しているから，kを “dual depth”-1, depth （“dual depth” とは $N_1 \subset N$の depth）を越えない最小の偶数としよう．このとき commuting square

$$\begin{array}{ccc} N \cap N_k' & \subset & N \cap N_{k+1}' \\ \cap & & \cap \\ M \cap N_k' & \subset & M \cap N_{k+1}' \end{array}$$

を調べよう．実は，一般にこのように4つの有限次元環があるとき，この inclusion は，string algebra と connection で与えられることがわかっ

ている．この事は，[O2] で示されているが，本質的には線形代数の命題である．ここでいう connection とは，

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "\xi_1"] \arrow[d, "\xi_2"'] & b \arrow[d, "\xi_3"] \\ c \arrow[r, "\xi_4"'] & d \end{tikzcd}$$

の形の四辺形に複素数を対応させるものである．ただし，ここで，各辺 $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ は，それぞれ $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ に属しており，頂点 a, b, c, d でつながっているものだけを考えている．このような四辺形は，可解格子模型では，admissible と言われ，connection に対応するものは，Boltzmann weight と呼ばれている．(格子模型についてはたとえば[B] を見よ．ただし connection のほうでは spectral parameter と呼ばれる parameter が欠けている．) この connection が，$M \cap N'_{k+1}$ を $N \cap N'_k \subset N \cap N'_{k+1} \subset M \cap N'_{k+1}$ $N \cap N'_k \subset M \cap N'_k \subset M \cap N'_{k+1}$ の二つの方法で string algebra と見なしたときの同一視を与えるのである．この同一視は unitary 行列で与えられなければならないから，次の unitarity が得られる．

$$\sum_{b,\xi_2,\xi_3} \begin{tikzcd} a \arrow[r, "\xi_2"] \arrow[d, "\xi_1"'] & b \arrow[d, "\xi_3"] \\ c \arrow[r, "\xi_4"'] & d \end{tikzcd} \begin{tikzcd} b \arrow[d, "\xi_3"'] & a \arrow[l, "\xi_2"'] \arrow[d, "\eta_1"] \\ d & c' \arrow[l, "\eta_4"] \end{tikzcd} = \delta_{\xi_1,\eta_1}\delta_{\xi_4,\eta_4}\delta_{c,c'},$$

$$\sum_{c,\xi_1,\xi_4} \begin{tikzcd} a \arrow[r, "\xi_2"] \arrow[d, "\xi_1"'] & b \arrow[d, "\xi_3"] \\ c \arrow[r, "\xi_4"'] & d \end{tikzcd} \begin{tikzcd} b' \arrow[d, "\eta_3"'] & a \arrow[l, "\eta_2"'] \arrow[d, "\xi_1"] \\ d & c \arrow[l, "\xi_4"] \end{tikzcd} = \delta_{\xi_2,\eta_2}\delta_{\xi_3,\eta_3}\delta_{b,b'}.$$

ただし，以下の規約を用いた．

$$
\begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{\xi_2} & b\\ {\scriptstyle\xi_1}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\xi_3} \\ c & \xrightarrow[\xi_4]{} & d \end{array}
= \overline{\begin{array}{ccc} b & \xleftarrow{\xi_2} & a \\ {\scriptstyle\xi_3}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\xi_1}\\ d & \xleftarrow[\xi_4]{} & c\end{array}}
$$

$$
= \overline{\begin{array}{ccc} c & \xrightarrow{\xi_4} & d\\ {\scriptstyle\xi_1}\big\uparrow & & \big\uparrow{\scriptstyle\xi_3} \\ a & \xrightarrow[\xi_2]{} & b \end{array}}
= \begin{array}{ccc} d & \xleftarrow{\xi_4} & c \\ {\scriptstyle\xi_3}\big\uparrow & & \big\uparrow{\scriptstyle\xi_1}\\ b & \xleftarrow[\xi_2]{} & a\end{array}
$$

可解格子模型では，これに相当する式を unitarity, または first inversion relations と呼ぶ．さて，上の diagram は，commuting square を与えることがよく知られている．今，trace も conditional expectation も具体的に書き下せるので commuting square という条件も connection に関する条件として書き下せる．すると次の条件式が commuting square 条件と同値であることがすぐにわかる.（これは[O2] で証明されたが，簡単に直接チェックできる．[HS] にも本質的に同じ計算がある.）

$$
\sum_{d,\xi_3,\xi_4} \sqrt{\frac{\mu(a)\mu(d)}{\mu(b)\mu(c)}}\,
\overline{\begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{\xi_1} & b\\ {\scriptstyle\xi_2}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\xi_3} \\ c & \xrightarrow[\xi_4]{} & d \end{array}}
\sqrt{\frac{\mu(a')\mu(d)}{\mu(b)\mu(c)}}
\begin{array}{ccc} a' & \xrightarrow{\eta_1} & b\\ {\scriptstyle\eta_2}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\xi_3} \\ c & \xrightarrow[\xi_4]{} & d \end{array}
$$

$$
=\delta_{a,a'}\delta_{\xi_1,\eta_1}\delta_{\xi_2,\eta_2}.
$$

ただし，ここで$\mu(\cdot)$ は，グラフの incidence matrix の Perron-Frobenius eigenvector の entry を表す．この式は可解格子模型での second inversion relations に相当する．最初の admissible square に対し，以下のようにあたらしい connection を「定義」すれば，上の式より，これら新しい

connection も unitary であることがわかる．

$$\begin{array}{ccc} d & \longrightarrow & c \\ \Big\downarrow & & \Big\downarrow \\ b & \longrightarrow & a \end{array} = \begin{array}{ccc} a & \longrightarrow & b \\ \Big\downarrow & & \Big\downarrow \\ c & \longrightarrow & d \end{array},$$

$$\begin{array}{ccc} c & \longrightarrow & d \\ \Big\downarrow & & \Big\downarrow \\ a & \longrightarrow & b \end{array} = \begin{array}{ccc} b & \longrightarrow & a \\ \Big\downarrow & & \Big\downarrow \\ d & \longrightarrow & c \end{array} = \sqrt{\frac{\mu(a)\mu(d)}{\mu(b)\mu(c)}}\ \overline{\begin{array}{ccc} a & \longrightarrow & b \\ \Big\downarrow & & \Big\downarrow \\ c & \longrightarrow & d \end{array}}.$$

これが，subfactor から connection を作る方法である．得られる connection は一意的ではないが，適当な connection の同値関係のもとで unique であることもすぐわかる．さて，これを用いて，新たに string algebra の列

$$\begin{array}{ccccccccc} A_{0,0} & \subset & A_{0,1} & \subset & A_{0,2} & \subset & A_{0,3} & \subset & \cdots \\ \cap & & \cap & & \cap & & \cap & & \\ A_{1,0} & \subset & A_{1,1} & \subset & A_{1,2} & \subset & A_{1,3} & \subset & \cdots \end{array}$$

を作る．すなわち，$A_{k,l}$は，縦に k, 横に lの長さを持つ string で生成されており，異なる string の表示が connection によって同一視されているのである．このとき Jones projections $(e_{-n})_{n\geq k}$の具体的な表示により，上の string algebra からできる subfactor $A_{0,\infty} \subset A_{1,\infty}$ は，もとの subfactor $N \subset M$に等しいことがわかる．これを用いて，上で得られた connection は，さらに強い条件 flatness を満たすことを次に示す．

§3 Compactness argument と flatness

さて，上で構成された connection を使って，string algebra の double sequence

$$\begin{array}{ccccccc} A_{0,0} & \subset & A_{0,1} & \subset & \cdots & \rightarrow & A_{0,\infty} \\ \cap & & \cap & & & & \cap \\ A_{1,0} & \subset & A_{1,1} & \subset & \cdots & \rightarrow & A_{1,\infty} \\ \cap & & \cap & & & & \cap \\ A_{2,0} & \subset & A_{2,1} & \subset & \cdots & \rightarrow & A_{2,\infty} \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots \end{array}$$

を作る．これらは，commuting square をなし，また縦方向に Jones projections が定義できることから，$N = A_{0,\infty}$, $M = A_{1,\infty}$という同一視により，列 $A_{0,\infty} \subset A_{1,\infty} \subset A_{2,\infty} \subset \cdots$ が，Jones tower $N \subset M \subset M_1 \subset M_2 \subset \cdots$と同一視される．さて，ここで relative commutant $M_k' \cap N$ を計算したいわけである．これを計算するのが Ocneanu の compactness argument である．一般に上のような unitarity と crossing symmetry を満たす connection が与えられて，グラフの “出発点”$*$も決まっているとしよう．以下，string algebra の double sequence の relative commutant の tower を計算する．

まず，$z \in A_{0,\infty}' \cap A_{k,\infty}$を取り，$z_n = E_{A_{k,n}}(z)$ とおくと $z_n \in A_{0,n}' \cap A_{k,n}$である．ここで n を十分大きく取っておけば，$A_{0,2n}' \cap A_{k,2n}$は，n によらない string algebra としての表示を持つ．この algebra は，有限次元で，z_nはノルム有界だから，各 z_nをこの algebra の元と見なせば，それは，収束部分列 $\{z_{2n_j}\}$ を持つ．さらに，$\{z_{2n_j+2}\}$ も収束すると仮定してよい．これらの収束先をそれぞれ，x, yとすれば，$x \cdot id^{(2)}$ と $id^{(2)} \cdot y$ が，connection によって同一視されることになる．ただし，ここで $id^{(2)}$ は水平方向の長さ 2 の trivial string を表す．ここで水平方向の Jones projection e を使って，実は，x, yは string として同じ形であることを示す．すなわち，

$$
\begin{aligned}
&(x \cdot id^{(2)}) \times (id^{(k)} \cdot e) = (id^{(2)} \cdot y) \times (e \cdot id^{(k)}) \\
=&e \cdot y = y \cdot e = (y \cdot id^{(2)}) \times (id^{(k)} \cdot e)
\end{aligned}
$$

を得る．ここで “$\times$” は，掛け算，“$\cdot$” は，string の連結を表す．ここで conditional expectation を取ることにより，$x = y$がわかる．この x の$*$からはじまる部分を取れば，それは，$A_{k,0}$の元と見なすことができ，それが zと同一視される．このような元を flat であるという．

さて，前の section のように subfactor から得られた connection の場合を考えよう．上でわかったことは，$N' \cap M_k \subset A_{k,0}$である．ところが，

double sequence の一番上の行と一番左の列は同じグラフ $\mathcal{G}$からできているのであるからここで両辺の次元は等しい．すなわち，$A_{k,0}$の元と $A_{0,l}$ の元は可換である．さらに，グラフ $\mathcal{G}, \mathcal{H}$をいれかえても同様の議論がなりたつ．この時，connection が，flat であるといわれる．Flat という名前の由来は，微分幾何での flat connection の discrete な類似と見なせるからである.（すなわち，ループが parallel transport で形を変えない，ということ.）

これによって，finite depth, finite index の subfactor から，flat connection への対応ができた．逆の対応も上の構成でできているので，これで，1 対 1 の対応になっている．したがって subfactor を分類するには，paragroup を分類すればよく，ある程度いい状況の時には，これが実行可能である．たとえば，index が 4 以下の場合については，グラフが (extended) Dynkin diagram になるが，E_8のグラフ以外についてはわかっている.（Ocneanu は，E_8もできるといっているが，誰も確認していない.）これについては，[I1, I2, IK, Ka, P1, P2] などを見るとよい．

参考文献

[B] R. J. Baxter, “Exactly solved models in statistical mechanics”, Academic Press, New York, 1982.

[GHJ] F. Goodman, P. de la Harpe, & V. F. R. Jones, “Coxeter graphs and towers of algebras”, MSRI publications 14, Springer, 1989.

[HS] U. Haagerup & J. Schou, in preparation.

[I1] M. Izumi, *Some results on classification of subfactors*, preprint, RIMS, Kyoto University, 1991.

[I2] M. Izumi, in prepararion.

[IK] M. Izumi & Y. Kawahigashi, *Classification of subfactors with the principal graph* $D_n^{(1)}$, preprint, RIMS, Kyoto University and University of Tokyo, 1991.

[J] V. F. R. Jones, *Index for subfactors*, Invent. Math. **72** (1983), 1–15.

[Ka] Y. Kawahigashi, *On flatness of Ocneanu's connections on the Dynkin diagrams and classification of subfactors*, University of Tokyo, preprint, 1990.

[O1] A. Ocneanu, *Quantized group string algebras and Galois theory for algebras*, in "Operator algebras and applications, Vol. 2 (Warwick, 1987)," London Math. Soc. Lect. Note Series Vol. 136, Cambridge University Press, 1988, pp. 119–172.

[O2] A. Ocneanu, *Graph geometry, quantized groups and nonamenable subfactors*, Lake Tahoe Lectures, June–July, 1989.

[O3] A. Ocneanu, "Quantum symmetry, differential geometry of finite graphs and classification of subfactors", 東大セミナリーノート No. 45, (Notes recorded by Y. Kawahigashi), 1991.

[P1] S. Popa, *Classification of subfactors : reduction to commuting squares*, Invent. Math. **101** (1990), 19–43.

[P2] S. Popa, *Sur la classification des sousfacteurs d'indice fini du facteur hyperfini*, C. R. Acad. Sc. Paris. **311** (1990), 95–100.