新しい対称性と作用素環，数理物理学

東京大学大学院数理科学研究科・河東泰之
e-mail: yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp

2025 年 12 月，岡シンポジウム，奈良女子大学

1　イントロダクション

群は対称性を記述する数学的対象である．これを一般化した，新しい種類の対称性があるということが，この 40 年くらいの間，数学，理論物理学の様々な分野で同時並行的にわかってきた．群概念の一般化としては量子群が有名であるが，ここではもっと一般的な設定を考えたい．

具体的な内容に入る前にまず，どうやって数学的概念の一般化をするかの一般論から始めよう．数学には無意味な一般化，くだらない一般化もたくさんあるが，ここではすでに意義があることが分かっていることしか扱わないので，そのような心配をする必要はない．

数学的概念は公理的に定義されるので，その公理を弱めるというのが真っ先に考えることである．しかし群の公理を眺めても，意味のある一般化はなかなか思いつかない．このような時に有効な一つの考え方は，まず公理系 A と (ほぼ) 同等な公理系 A' に移ってそちらの公理系を弱めるというものである．ここで「ほぼ」と書いたのは，厳密な意味での一般化をしなくてはいけないわけではなく，興味深い数学的対象を見出せればよいという意味である．

作用素環に関連したところで例を挙げると，compact Hausdorff 空間 X を考えることと，X 上の複素数値連続関数環 $C(X)$ を考えることは等価である．そして後者は単位元を持つ可換な C^* 環と同じものなので，このように見れば非可換な C^* 環に移行することは簡単である．この立場からは一般の C^* 環は，compact Hausdorff 空間の一般化と思えるものであり，力学系，K 理論などさまざまな考え方が C^* 環の設定に一般化される．Compact Hausdorff 空間というだけでは幾何学的構造があまりないが，これにもっと構造を入れて，多様体の一般化を考えるのが非可換幾何学である．

もう一つ別の例を挙げると，Lie 群と Lie 環の対応である．これらは厳密な 1 対 1 対応ではないが，だいたいは対応している．Lie 群の公理を見てもどう一般化すればいいのかわからないが，Lie 環 (の普遍包絡環) の方なら変形ができるというのが Drinfeld-神保の量子群の考え方である．(ついでに触れておくと作用素環の枠組みでも量子群と呼ばれるものがあり，こちらは Lie 群上の連続関数のなす可換環を非可換環に一般化したものである．Lie 群の積演算は連続関数環上の余積になるので，余積を持つ非可換環を考えることになる．Compact Lie 群の一径数変形などの重要な例では，Drinfeld-神保の量子群と作用素環的な量子群の間に自然な関係がある．)

さて話の本題に戻り，群の一番簡単なケースとして有限群を考えよう．有限群とはもちろん，有限集合上に結合法則を満たす 2 項演算があり，単位元，逆元の公理を満たすもののことである．有限群 G を固定して，その有限次元ユニタリ表現全体を考える．さらに既約なものだけを考えて，各ユニタリ同値類の中から一つずつ代表元 $\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_n$ を取って固定する．π_i と π_j のテンソル積を作るとそれはユニタリ同値の意味で

$$\pi_i \otimes \pi_j \cong \bigoplus_{k=0}^{n} N_{ij}^k \pi_k$$

と既約分解する．ここで N_{ij}^k は多重度を表す 0 以上の整数である．このテンソル積演算については $(\pi_i \otimes \pi_j) \otimes \pi_k$ と $\pi_i \otimes (\pi_j \otimes \pi_k)$ が自然にユニタリ同値になるという意味で結合法則が成り立つ．また π_0 を自明表現 (G のすべての元をスカラー 1 に送る) とすると，$\pi_0 \otimes \pi_i$, $\pi_i \otimes \pi_0$ は自然に π_i にユニタリ同値になり，この意味で π_0 はテンソル積演算の単位元である．

逆元の直接的な類似は，π_i に対して $\pi_i \otimes \pi_j = \pi_0$ を満たす π_j だが，これは π_i の次元が 1 でない限り存在しない．その代わりに $\pi_i \otimes \pi_j$ の既約分解が π_0 を含むという条件を考えれば，この π_j が π_i の逆元のような役割を果たすのである．一意的に決まるこの π_j を π_i の双対表現と言う．これらの意味で，有限群の表現論は有限群自体と似た代数的構造を持っている．さらに，G の表現論についてしかるべき情報を持っていれば G の情報が完全に復活できる．(ここでは「しかるべき情報」について詳しく述べないが，Tannaka-Krein などの双対性の話である．Doplicher-Roberts や Deligne の双対性も同じ種類の話である．)

群 G の有限次元ユニタリ表現 π, σ に対し，intertwiner (絡作用素) の空間

$$\{T \in B(H_\pi, H_\sigma) \mid T\pi(g) = \sigma(g)T,\ g \in G\}$$

を考える．ここで H_π, H_σ はそれぞれ π, σ の表現空間である．群 G の有限次元ユニタリ表現を対象，それらの間の intertwiner を射と思うと，射の合成が自然に定義できて圏になる．(加法圏と呼ばれるものだが，その定義は省略する．) さらに加えて，上述のように対象の間にテンソル積の構造があり，このようなものをテンソル圏と呼ぶ．(テンソル圏と言ったとき，何が公理なのかについては複数の流儀がある．詳しくは教科書 [4] を参照のこと．)

さらに既約表現の概念の一般化にあたる単純対象というものがあり，その同値類が有限個しかない場合が，有限群のユニタリ表現論の直接的な類似であり，このようなテンソル圏 (より正確には有限半単純 rigid テンソル圏) のことをフュージョン圏と呼ぶ．この名前は，共形場理論に現れるこの種のテンソル積をフュージョン積と呼ぶことから来ている．テンソル積の単位元に当たるものを自明対象，双対表現に当たるものを双対対象と呼ぶ．このとき，フュージョン圏の単純対象は Perron–Frobenius 次元と呼ばれる正実数値を持ち，これは表現の次元を一般化したものだが，自然数ではない正の実数値を取りうる．たとえば

$$\sqrt{\frac{5+\sqrt{13}}{2}}$$

が Perron–Frobenius 次元の重要な例として，近年共形場理論やトポロジカル物性物理学でも注目を集めている．

以下これらの数学的内容について説明していくが，これらの話題のうち古いものについては本 [5] に詳しく書かれている．最近の進展は [6], [12], [14] とそこでの引用文献を参考にしていただきたい．(本稿での引用文献は作用素環論，さらには私自身の研究を中心にしており，それ以外の多くの重要な文献が抜けている．[6], [12] ではきちんと原論文が引用されている．)

2　作用素環

上述のフュージョン圏が我々の数学的興味の対象であり，それは純粋に代数的，公理的に定義されるが，興味ある重要な例はたいてい何らかの数学的対象の，何らかの意味での表現論として現れる．量子群もその一つだが，ここでは作用素環論を用いたアプローチに焦点を当てたい．後述の Jones による subfactor 理論 [9] や，それに基づく結び目の不変量 Jones 多項式の発見 [10] は，本稿の対象である「量子的数学」の最も早い例である．そこでまず作用素環について簡単に説明しよう．

作用素環 (operator algebra) とは，Hilbert 空間上の有界線型作用素のなす線形空間かつ環であるもので，$*$ 演算で閉じており，適当な位相でも閉じているものである．量子力学における物理量が自己共役作用素で表されることが，$*$ 演算で閉じていることを要求することの一つの大きな理由である．表現論で言えば，単なる線型表現ではなくユニタリ表現を考えることも類似している．Banach 空間 (さらにはもっと一般の位相線形空間) 上の作用素ではなく，Hilbert 空間上で考えることも，Hilbert 空間の係数体を実数ではなく複素数に取ることも同様の理由による．「適当な位相」にはノルム位相 (Hilbert 空間の単位球上の一様収束が定める位相) と，作用素の強位相 (Hilbert 空間上の各点収束が定める位相) の二つが典型的なもので，前者で閉じているものが C^* 環，後者で閉じているものが von Neumann 環である．弱い位相で閉じている方が強い条件だから，von Neumann 環は自動的に C^* 環でもあるが，実はそう思っても便利なことはあまりない．また，作用素の弱位相 (Hilbert 空間上の各点弱収束の定める位相) で閉じている作用素環というものを考えることもでき，作用素の強位相と作用素の弱位相は違う位相であるが，後者で閉じている作用素環は von Neumann 環と同じものである．

線形代数でも真っ先に習うように，作用素の積は一般に非可換である．これはまた量子力学でも非常に重要なポイントである．だから作用素環で重要な例は非可換環であるが，可換環を考えて悪いわけではない．実は可換な C^* 環は，ある compact Hausdorff 空間 X 上の複素数値連続関数環 $C(X)$ と同型であること，可換な von Neumann 環はある測度空間 (X, μ) 上の本質的有界な可測関数環 $L^\infty(X, \mu)$ であることがわかっている．(単位区間 $[0, 1]$ 上で Lebesgue 測度を考えた場合の可換 von Neumann 環 $L^\infty([0, 1])$ はある compact Hausdorff 空間 X 上の複素数値連続関数環 $C(X)$ と同型であるのだが，この X はずたずたに不連結な空間であり，通常の幾何学で考える空間とはかけ離れている．これは von Neumann 環を C^* 環と思ってもあまりよいことがない一例である．)

Compact Hausdorff 空間 X については $C(X)$ から X の情報を完全に復元することができる．さらに compact Hausdorff 空間を対象，その間の連続関数を射とする圏は，可換 C^* 環を対象，その間の $*$ 準同型を射とする圏と (反変) 同値である．この意味で，compact Hausdorff 空間を考えることと，可換 C^* 環を考えることは同じであり，後者の枠組みでは非可換 C^* 環に一般化することは容易である．これが前セ

クションで述べた例であり，この意味で一般の C^* は「非可換な compact Hausdorff 空間」と思うことができ，同様に意味で，一般の von Neumann 環は「非可換な測度空間」と思える．(これらはあくまで気持ちを述べたものであり，実際に非可換な空間というものがあるわけではない．) 一般に適切な構造を持った空間ではそれに対応した関数環 (連続，可測のほかにも C^∞ 級，正則など) を考えることができ，その関数環の方が空間より根源的なものだ，というのは有効な考え方である．たとえば代数幾何学においても，一般の可換環を関数環のようなものだと思う考え方は役に立っている．(Grothendieck は代数幾何学に移る前は，作用素環論を含む関数解析学を研究していたのであった．) これをさらに推し進めたのが Connes の非可換幾何学である．

C^* 環も von Neumann 環もともに重要で興味深いもので，両者それぞれに面白い点があるが，本稿の話題に直接の関係が深いのは von Neumann 環である．そこで以下 von Neumann 環について説明する．関数環が空間を覚えているという話だが，可換 von Neumann 環の場合は可分な Hilbert 空間に作用していて，直和成分 $\mathbb{C}$ を含まないといったほぼ自明な条件を付ければみな $L^\infty([0,1])$ に同型である．たとえば多様体上の関数環を考える際も，compact 多様体上の連続関数環であれば，もとの多様体の位相同型類を覚えているが，(可分な Hilbert 空間に作用する範囲で) L^∞ 関数環を考えたのでは，多様体の間の区別は全部なくなってしまう．しかし，可換から遠い von Neumann 環を考えれば互いに同型でないものがたくさんある．可換から最も遠いクラスの von Neumann 環は，以下の互いに同値な条件で特徴づけられ，factor と呼ばれる．

1. 中心が $\mathbb{C}$ に同型.
2. 非自明な直和因子を持たない.
3. 非自明な，作用素の強位相で閉じた両側イデアルを持たない.

通常の数学用語の使い方に従えば，(3) の条件に基づいて単純 von Neumann 環と呼ばれるべきだと思われるが，歴史的な理由により factor という名前がついている．

$M_2(\mathbb{C}) \subset M_2(\mathbb{C}) \otimes M_2(\mathbb{C})$ という埋め込みを $x \mapsto x \otimes I$ で定める．これは適当に基底を取れば

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{pmatrix}$$

という埋め込みと同じである．これと同様の操作を繰り返して，

$$M_2(\mathbb{C}) \subset M_2(\mathbb{C}) \otimes M_2(\mathbb{C}) \subset M_2(\mathbb{C}) \otimes M_2(\mathbb{C}) \otimes M_2(\mathbb{C}) \subset \cdots$$

という増大列を考える．この増大列の和は $*$ 演算を持つ無限次元環だが，これはしかるべき Hilbert 空間上にうまく作用させることができ，そこで作用素の強位相について閉包を取ったものが factor になることがわかる．これを hyperfinite II_1 factor と呼び，von Neumann 環の理論において最も重要な例と言ってよいものである．(有限次元環の増大列で近似できるということから有限次元に近いという意味で hyperfinite という名前がついている．)

さて，群 G と部分群 H について，指数 $[G:H]$ というものがあり，さらに体の拡大 $K \subset L$ についても拡大次数 $[L:K]$ というものがある．こちらはさらに Galois 理論という，体の拡大を記述するものがある．この類似を factor とその拡大 factor について考えようというのが Jones の理論の出発点である．(Galois 理論の場合は，正規拡大，分離拡大といった概念があるが，今はおおざっぱな類似を考えているだけなので，そういうことは気にしない．) 小さい factor を固定しても大きい factor を固定しても同様なのだが，作用素環論の枠組みでは後者の方が自然になることが多いので，通常そのような設定で考える．この場合は subfactor を考えることになるので，factor の包含 $N \subset M$ のことを単に subfactor と呼ぶことが多い．N が M への適当な有限群作用の不動点環の場合は，部分群と中間作用素環について，古典的な Galois 対応の類似が成り立つ．この方面の様々な拡張も大きな話題で，現在でも多くの研究が行われているが，本稿の主テーマは，subfactor が有限群作用の不動点環ではないような状況である．

Subfactor $N \subset M$ に対し，体の拡大次数や部分群の指数に似た $[M:N]$ を定義することができ，Jones 指数と呼ばれる．記号も同じである．しかし大きな違いは，Jones 指数は整数でない実数値を取りうるということである．一般的な設定だと，Jones 指数の取りうる値はちょうど，

$$\{4\cos^2\frac{\pi}{n} \mid n = 3, 4, 5, \ldots\} \cup [4, \infty) \cup \{\infty\}$$

であることが知られている．この $4\cos^2\dfrac{\pi}{n}$ という値は量子群 $U_q(sl_2)$ の表現の量子次元とも密接に関係している．なお上記の $[4, \infty)$ の部分は，既約性 $N' \cap M = \mathbb{C}$ を落としたり，一般の factor で考えたりしたときにこうなるというもので，M を hyperfinite II_1 factor にして，既約性 $N' \cap M = \mathbb{C}$ を課したときに取りうる値を決定することは Jones の最初の論文 [9] 以来の重要な未解決問題である．

$[M:N] = \infty$ の場合はいろいろなことが起こりうるので統一的な扱いは困難である．そこで以下 $[M:N] < \infty$ と仮定しよう．ここから以下次のようにしかるべきテンソル圏を作ることができるのだが，その前に一般的なアイディアを説明しよう．テンソル圏での対象は何らかの意味で「群の表現のようなもの」である．群の表現の直接的な類似物は (作用素) 環の表現であろう．しかし，von Neumann 環の表現論ではおもしろいことは起きないことが昔からわかっている．たとえば表現はごく自明な場合以外，決して既約にならない．Hyperfinite II_1 factor の (可分 Hilbert 空間上の) 表現は $[0, \infty) \cup \{\infty\}$ に値を持つ，ある種の次元だけで完全に分類される．さらに場の量子論に現れる von Neumann 環は次のセクションで説明する III 型 factor と呼ばれるものなのだが，これについては (0 でない可分 Hilbert 空間上の) すべての表現は互いにユニタリ同値である．また von Neumann 環の表現のテンソル積というものも自然には定義できない．一方，von Neumann 環 M の表現とは，M の Hilbert 空間への作用とも思うことができ，これは左 M-module と言ってもよいが，単なる module ではなく，左右から M が作用する M-M bimodule を考えると，これが群の表現の正しい類似になるのである．この視点は Connes によってもたらされたものだが，Jones 理論の設定では次のように考えられる．

Subfactor $N \subset M$ で $[M:N] < \infty$ となるものから出発する．このとき大きな factor M にはもちろん subfactor N が左右から作用しているので，N-N bimodule ${}_N M_N$ ができる．このとき M は Hilbert 空間ではないが，自然に内積を入れて完備化して，左右の N 作用を保ったまま Hilbert 空間にすることができる．これも単に

${}_N M_N$ と書く．そうすると，N-N bimodule については N 上の相対テンソル積というものを自然に定義することができ，また N-N bimodule の直和や既約分解も自然に定義することができる．(ここで有限個の直和因子に既約分解できるというところに $[M:N]<\infty$ という仮定が効いている．) そこで，${}_N M\otimes_N M\otimes_N\cdots\otimes_N M_N$ という有限個の相対テンソル積の既約分解を考え，そこから生じる既約 N-N bimodule のユニタリ同値類を考える．一般的にはこのようにして可算個のユニタリ同値類が現れるが，たまたま有限個しか発生しないということが起こる．この有限性を持つとき，もとの subfactor は finite depth を持つという．(Depth という言葉はもともとの Jones 理論の設定から来ているが特に気にしなくてよい．) この種の有限性は量子群の 1 のべき根における表現論に似た状況であり，共形場理論や量子位相不変量の理論ではしばしば有理性と呼ばれるものと同じ種類の条件である．(有理性という名前は実数値パラメータが有理数値を取ることと関係している．)

この finite depth の仮定のもとで，各ユニタリ同値類から一つずつ取った N-N bimodule たちを ${}_N(X_i)_N$ としよう．すると ${}_N(X_i)\otimes_N(X_j)_N$ はユニタリ同値の意味で

$$\bigoplus_k N_{ij}^k\,{}_N(X_k)_N$$

と分解することがわかる．(N_{ij}^k は多重度を表す 0 以上の整数である．) また，これらの N-N bimodule たちの中に ${}_N N_N$ が入っていて，これが相対テンソル積についての単位元の役割を果たす．さらに，${}_N(X_i)_N$ についてはその dual に当たる ${}_N(\overline{X_i})_N$ がこれらの N-N bimodule たちの中にあり，${}_N(X_i)\otimes_N(\overline{X_i})_N$ が ${}_N N_N$ を直和因子として含むという条件で特徴づけられることもわかる．これによって，${}_N(X_i)_N$ の有限直和にユニタリ同値な N-N bimodule 全体はフュージョン圏をなす．逆に任意のフュージョン圏は hyperfinite II_1 factor M の finite depth を持つ subfactor $N\subset M$ からこのようにして作れることもわかっている．

この事実の解釈は，このような subfactor $N\subset M$ から生じるフュージョン圏がこの subfactor の Galois 群の一般化に当たる代数系だというものである．実際には，N に有限群 G が非自明に作用しているとき，半直積とよく似た接合積と呼ばれる構成により，N を含む factor $M=N\rtimes G$ が作れる．この subfactor $N\subset M$ に対して上述の構成を行ったときにできるテンソル圏は群 G そのものである．(各単純対象が群の元に対応し，単純対象のテンソル積が群の元の積に対応する．)

3　場の量子論，特に共形場理論

次に数理物理学との関係を述べよう．上でも書いたようにテンソル圏は何らかの数学的・代数的構造の表現論として現れると期待される．その何らかの構造としてある種の場の量子論が現れることを説明する．

場の量子論は物理の大理論であるが，数学的に満足のいくフォーミュレーションは現在存在していない．そこで場の量子論のうちいくつかの性質を取り出して数学的にきちんとした形で研究するということが行われている．そこで数学的，抽象的に考えると，場の量子論の数学的構成要素は，時空，時空対称性を記述する群，状態のなす Hilbert 空間，時空対称性のなす群のこの Hilbert 空間への (射影的) ユニタリ表現，この時空上のこの Hilbert 空間に作用する量子場である．ここで古典的な場とは時空の上の関数のことであったこと，量子力学では数を作用素 (物理では演

算子と呼ぶ) に置き換えるのであったことを思い出すと，時空上の量子場とは時空上の作用素値関数であると期待される．しかし実際には δ 関数のようなものも扱わなくてはいけないので，実際に必要なものは時空の上の作用素値超関数である．したがって，数学的には場の量子論とは，時空，状態のなす Hilbert 空間，時空対称性の群とその (射影的) ユニタリ表現，この時空の上の作用素値超関数の組であって，何らかの制約条件を満たすものと考えられる．

抽象的設定では時空は何を考えてもいいし，適当な多様体を考えることはもちろん自然だし，さらに非可換幾何学の設定では非可換時空といったものも考えられているが，最も簡単な設定は，我々の時空の近似として最も素直な (4 次元)Minkowski 空間と思われる．その際の時空対称性の群としてもっとも自然なものは Minkowski 空間の構造を保つ Poincaré 群である．この設定で場の量子論の公理を数学的に書き下したのが Wightman 公理系である．この公理系を満たすデータの 1 セットが一つの場の量子論を表している．数学としてはこの公理系からの帰結を調べる，公理系の下で様々な追加条件の間の関係を調べる，公理系を満たす例を作る，公理系を満たすものを何らかの基準で分類する，といったことが問題になる．公理的場の量子論，構成的場の量子論などといわれる分野である．しかしながら，この設定だと長年の努力にもかかわらず，公理系を満たし，相互作用を持つ非自明な例は構成されていない．これとは対照的に，現在盛んに研究されているものは 2 次元 Minkowski 空間で共形対称群を考えた 2 次元共形場理論である．その話に移る前に，場の量子論に対する作用素環的なアプローチを先に説明しよう．

上記の考え方は理論的に何の問題もないが，物理量を表す自己共役作用素はしばしば非有界であることが代数的取り扱いを難しくする．また関数ではなく超関数を扱うことも別の困難をもたらす．これらを回避して，有界作用素だけを使って公理系を作ろうというのが作用素環に基づく，代数的場の量子論と呼ばれる方法である．ここで「代数的」という名前は作用素のなす代数系を基本的な対象にしているということから来ている．それを記述する前にまず，非有界作用素と有界作用素との関係について簡単に触れておこう．h を Hilbert 空間 H に作用する非有界自己共役作用素としよう．このとき $t \in \mathbb{R}$ に対して $\exp(ith)$ を考えるとこれは一径数ユニタリ群を与える．またもとの h はこの一径数ユニタリ群から復活できるので，h を考えることと，$\exp(ith)$ という族を考えることは同じであるが，後者は有界作用素しか使っていない．このように，単独の作用素ではなく，作用素の族を使えば非有界作用素の話は有界作用素だけの話に帰着できるのである．

さて代数的場の量子論の公理系に移ろう．時空領域 O ごとにそこでの物理量を表す自己共役作用素たちがあるので，それらの生成する von Neumann 環 $A(O)$ を考える．ここで自己共役作用素が非有界であっても上記の方法によって有界作用素だけからなる von Neumann 環を考えるのである．代数的場の量子論ではこれらの von Neumann 環の族 $\{A(O)\}_O$ が基本的な対象である．これに時空対称性の群，その (射影的) ユニタリ表現を組にしたものを考える．公理の詳しいことは書かないが，重要な公理の一つは $O_1 \subset O_2$ ならば $A(O_1) \subset A(O_2)$ というもので，時空領域が大きい方が観測可能量が多いのだからこれは当然の公理である．もう一つの重要な，しかしそれほど自明ではない公理は局所性の公理で，O_1 と O_2 が空間的に分離されていれば，$A(O_1)$ の元と $A(O_2)$ の元は交換するというものである．空間的に分離されているということは，光の速度でも相互に干渉できないので，観測可能量は互いに交換するという相対論的要請から来ている．この代数的場の量子論を 4 次元 Minkowski 空間と Poincaré 群について考えてもいいのだが，物理的に非自明な例

が一つもないということには変わりがないので，この段階でのメリットが特にあるわけではない．

数学的に重要で興味深い理論が最近大きく進展しているのは 2 次元 Minkowski 空間で共形対称性を考えるものである．これが 2 次元共形場理論と呼ばれるものだが，さらに 2 次元 Minkowski 空間上の理論を二つの光線 $\{x = \pm t\}$ 上で考えて，(適切な条件の下で) 左・右のカイラル成分に分解したものがカイラル共形場理論として深く研究されている．ここでは最初からカイラル共形場理論だけを説明しよう．

この理論では時空に当たるものは光線 $\{x = \pm t\}$ の片方をコンパクト化した S^1 である．時空と言っているのに 1 次元分しかないが，気分としては時間と空間が 1/2 次元分ということである．そして時空対称性の群としては，向きを保つ微分同相写像全体 $\mathrm{Diff}(S^1)$ を取る．このように無限次元の対称性を使うことが，上に出てきた Poincaré 群などと違うところである．そして時空領域として考えるべきものは円弧，正確に言うと S^1 の空でなく稠密でもない連結開部分集合であり，この設定では通常単に区間と呼ぶ．定義により，S^1 自身も，S^1 から 1 点を除いたものも区間ではないことに注意する．

状態のなす Hilbert 空間 H があり，ここには真空ベクトルと呼ばれる特別のベクトルが入っている．各区間 $I \subset S^1$ ごとに von Neumann 環 $A(I)$ が対応し，上と同様，$I_1 \subset I_2$ のとき $A(I_1) \subset A(I_2)$ を公理として要請する．局所性の公理はさらに単純な形となり，$I_1 \cap I_2 = \varnothing$ の時 $A(I_1)$ の元と $A(I_2)$ の元が交換する，という形を取る．他の公理は省略するが，この von Neumann 環の族 $\{A(I)\}_{I \subset S^1}$, Hilbert 空間 H, $\mathrm{Diff}(S^1)$ の射影的ユニタリ群の組が代数的カイラル共形場理論での研究対象であり，共形ネットと呼ばれる．単に族 $\{A(I)\}_{I \subset S^1}$ だけを取り出して共形ネットと呼ぶことも多い．(正確な公理は [16] にある．なおネットという名前は，時空領域たちが有向族をなすことから来ているのだが，カイラル共形場理論の場合は，S^1 上の区間たちは有向族をなしていないので，本当はこの名前は適切ではない．Cosheaf という名前を使っている人たちもいたのだが，現在では共形ネットという名前が定着している．) 標準的な公理系のもとでは各 $A(I)$ はすべて自動的に，Araki-Woods III_1 factor と呼ばれる von Neumann 環になることが分かっている．この von Neumann 環は前セクションで説明した hyperfinite II_1 factor からある標準的な操作によって作り出せるものである．すなわち共形ネットの本質的な情報は各 von Neumann 環 $A(I)$ に含まれているのではなく，その族 $\{A(I)\}$ の中の相互関係に含まれているのである．このことは前セクションで述べた，hyperfinite II_1 factor という一つの von Neumann 環が，subfactor という相対関係を通じてすべてのフュージョン圏を記述できることと似ている．

一つの共形ネットの von Neumann 環たちは定義によって，最初から共通の，真空ベクトルを持つ Hilbert 空間に作用しているのだが，これらが一斉に別の (真空ベクトルを持たない) Hilbert 空間に作用しているものが，共形ネットの表現である．これについて，直和や既約分解などは容易に定義できるが，表現たちからテンソル圏を作りたい．しかし表現のテンソル積を定義することは容易ではない．これを解決するのが 1970 年代の Doplicher–Haag–Roberts 理論である．詳しいことは省略するが，Doplicher–Haag–Roberts 理論では一つの表現から，I を一つ固定した von Neumann 環 $A(I)$ の自己準同型 λ が得られ，この自己準同型が表現の本質的な情報を覚えている．二つの表現があるときは，対応する自己準同型 λ, μ を取り，その合成 $\lambda \circ \mu$ を作るとこれに対応する表現があり，それがもとの表現 2 つのテンソル積に当たるものなのである．これによって表現たちはテンソル圏をなす．さらに，自

己準同型の像から生じる subfactor の Jones 指数の平方根がこの表現の次元に相当する量を与える．([19], [20].) 場の量子論の文脈では統計的次元とも呼ばれるものである．上のように自己準同型の合成を考えると，$\lambda \circ \mu$ と $\mu \circ \lambda$ の間に関係があるようには見えないと思うが，実はこの二つの定める表現はユニタリ同値になることがわかっている．Doplicher–Haag–Roberts はもともと 4 次元 Minkowski 空間の設定で考えていたのだが，その状況だと $\lambda \circ \mu$ と $\mu \circ \lambda$ との間のユニタリ同値性は，群の表現における $\pi \otimes \sigma$ と $\sigma \otimes \pi$ との間のユニタリ同値性と完全に並行しており，場の量子論の表現のなすテンソル圏は，(一般には有限ではない) compact 群の表現論を定めることがわかっている．しかしカイラル共形場理論の設定だと，自己準同型の合成の可換性は一般に非自明なもので，braiding (組紐構造) と呼ばれる構造を生み出す．Braiding という名前は，自己準同型 λ と μ の合成の順番を入れ替えることが，λ とラベル付けされた紐と，μ とラベル付けされた紐を交差させることと同様に思えるからである．ここで紐の交差だとどちらを上にするかで 2 種類の交差があるわけだが，この区別があるというのが「非自明な可換性」の意味するところである．これによって共形ネットの表現論は braiding を持つテンソル圏，すなわち braid 圏をなす．さらにある種の有限性があるときは，この braiding で上交差と下交差が本当に違っており，そのようなフュージョン圏は モジュラーテンソル圏と呼ばれるものになっている．(このモジュラーという名前は $SL(2,\mathbb{Z})$ のユニタリ表現を生じることから来ている．) このように，有限性を持ったカイラル共形場理論の表現論からモジュラーテンソル圏が生じるということは物理の文献では前から言われていたが，数学的に正確な設定で初めて証明を与えたのは [17] である．

このようにして有限性を持つ共形ネットにモジュラーテンソル圏を対応させる写像ができるが，これは単射ではないことがわかっており，また全射かどうかはわかっていない．ただ全射性については正しいことが期待されている．フュージョン圏はそもそも一般にテンソル積が可換でないので，braiding の構造は持たないが，一般のフュージョン圏からモジュラーテンソル圏を生み出す Drinfeld center と呼ばれる構成がよく知られている．そこで任意に与えられたフュージョン圏の Drinfeld center が共形ネットの表現圏として実現できると期待されているのだが，これは基本的な重要未解決問題である．また表現圏が同じ共形ネットにどのような関係があるかということもあまりよくわかっていない．

このセクションの最後に頂点作用素代数 (vertex operator algebra) について触れておこう．この英語名称は作用素環 (operator algebra) と同じ部分を含んでいるが，この名前は operator algebra に vertex がついているのではなく，下で説明する vertex operator のなす代数系という意味である．なお作用素環の時は algebra を環と訳し，頂点作用素代数の時は代数と訳すのは一貫していないが，歴史的理由でそうなっている．作用素環でも作用素代数と呼ぶべきだという人は昔からいるが，全然普及していない．頂点作用素代数はカイラル共形場理論において，作用素環ではなく Wightman 公理系と同様に作用素値超関数としての量子場を扱うものである．時空に当たるものが S^1 になったことの大きなメリットは，作用素値超関数が Fourier 級数展開できるということである．この設定では Hilbert 空間内の状態 u から，作用素値超関数の Fourier 級数展開

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n z^{-n-1}$$

が生じる．作用素値超関数なので，Fourier 級数展開の係数 u_n は作用素であり，状

態のなす Hilbert 空間に作用する．この Fourier 級数展開を頂点作用素という．頂点という名前は物理学で相互作用の起こる点を考えていることから来ている．また z の指数が n ではなく $-n-1$ になっていることには理由があるが，単に取り決めと思っていて問題ない．この頂点作用素の族を公理づけたものが頂点作用素代数である．u_n の状態ベクトル v への作用を $u_n v$ と書くと，これは u, v の 2 項演算なので，ある種の積とも考えられる．そうすると頂点作用素代数とは，状態のなす共通のベクトル空間に $n \in \mathbb{Z}$ でラベル付けされた可算個の積演算がありさまざまな両立条件を満たすものとも考えられる．ただしこれらの両立条件 (Borcherds 等式など) はとても複雑で，結合法則，分配法則のような簡単な形では全くない．

頂点作用素代数はもともと別の方向から誕生した．まず，j 関数というものがあり，$\mathrm{Im}\,\tau > 0$ を満たす複素数 τ に対し，$q = \exp(2\pi i\tau)$ とおくと

$$j(\tau) = q^{-1} + 744 + 196884q + 21493760q^2 + 864299970q^3 + \cdots$$

という展開を持つ．この関数は

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z})$$

に対して

$$j(\tau) = j\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right)$$

という性質を持っている．Laurent 展開が q^{-1} で始まるという制限のもとでは，j 関数は定数項 744 以外はこの性質で一意的に特徴づけられる．

この q の係数 196884 が，Monster 群の非自明な既約表現の最小の次数 196883 と「ほとんど同じ」であることに McKay が気付いた．Monster 群は 26 個ある散在型有限単純群の中で最大の位数 (約 8×10^{53}) を持つものである．これを発展させて，Conway-Norton は次の Moonshine 予想を提出した．(なお，Moonshine というのは，ばかげた考え，密造酒を表す英語の俗語である．古典的な j 関数と，Monster 群と言う例外的な有限群が関係するという考えがあまりにばかげているということからつけられた名前である．)

予想 3.1

1. ある無限次元 graded $\mathbb{C}$-ベクトル空間 $V = \bigoplus_{n=0}^{\infty} V_n$ $(\dim V_n < \infty)$ で，ある自然な代数的構造を持ち，その構造の自己同型群がちょうど Monster 群になるものがある．

2. Monster 群の各元 g は各 V_n に線型に作用する．この作用から生じる Laurent 級数
$$\sum_{n=0}^{\infty} (\mathrm{Tr}\ g|_{V_n}) q^{n-1}$$
は，$SL(2, \mathbb{R})$ の genus 0 部分群から生じる Hauptmodul と呼ばれる古典的な関数である．特に g が単位元の場合が j 関数から定数項を除いたものである．

頂点作用素代数は，この予想の「ある自然な代数的構造」として導入された．予想の 1. は Frenkel-Lepowsky-Meurman によって解決され，Borcherds は予想の 2. を解決して Fields 賞を受賞した．

頂点作用素代数にも表現の概念がある．こちらでは頂点作用素代数の module と呼ぶのが普通である．この設定でも module のテンソル積が定義され，braiding が生じ，適当な有限性条件の下で表現論がモジュラーテンソル圏になることが示されている．ただしテンソル積の定義がとても難しく，さまざまな証明の難度は高い．

ここまで少しごまかしていたが，作用素環的な設定では Hilbert 空間があることが絶対的に重要であり，特に状態のなす空間には正定値内積がある．しかし頂点作用素代数ではかなりの部分が純粋に代数的にもできるので，正定値内積の存在を仮定しない理論もある．頂点作用素代数が都合のよい正定値内積を持つことをユニタリ性と言う．

共形ネットとユニタリな頂点作用素代数は，同じ物理理論を違う方法で数学的に公理化したものなので，(少なくとも都合のよい追加の仮定の下で) 等価であるべきである．片方でできる例の構成，たとえば Wess–Zumino–Witten model や lattice からの構成や，またすでにある例から新しい例を作る手法，たとえばテンソル積，simple current construction, orbifold construction, coset construction, Frobenius 代数による拡大などの手法が，片方での成果からもう片方への成果に翻訳されてきた例も多い．しかし，片方の公理系を満たすものからもう片方の公理系を満たすものに直接移るというのはいろいろ難しい点があり，[3] で初めて，しかるべき条件を満たす頂点作用素代数から共形ネットに移ることができ，このようにして作った共形ネットからは元の頂点作用素代数が復元できることが示された．この方向の研究は近年大きく進歩しており，[7] では任意の共形ネットから上の「しかるべき条件」を満たす頂点作用素代数が作れて，そこから元の共形ネットに戻れるということも示されている．さらに両者の表現論の直接的対応についても大きな進展が続いている．

4　物性物理学とテンソルネットワーク

前セクションの共形場理論との関係は 20 世紀末から大きな成果を挙げてきたが，この最後のセクションでは最近 10 年近くに発展してきた別方向の数理物理学との関連を説明したい．

物性物理学においてトポロジカル物性と言うものが，2016 年のノーベル物理学賞を受賞するなど，大きな注目を浴びている．様々な新物質の開発に役立つことが期待されており，量子コンピュータの実現方法の一つとして注目されているトポロジカル量子コンピュータにも有用と考えられている．これは代数的トポロジーをはじめとした多くの数学理論と結びついており，数学の立場からもたいへん興味深いものである．物質のトポロジカル相の分類と呼ばれる問題も作用素環を用いた研究が大きく進展しており，緒方芳子の貢献が大きく，前セクションの代数的場の量子論とよく似た数学的構造が現れる．このテーマは広大なものだが，本セクションではテンソルネットワークとの関係に絞って話を進める．

3 次元空間内の粒子は boson と fermion に分かれる．それらの交換の様子を記述するのは置換群である．一方，2 次元空間内だと anyon と呼ばれる仮想的な粒子が現れること，その交換の様子を記述するのは braid 群であることが知られている．(Boson と fermion には ± 1 の phase が対応している．Anyon には絶対値 1 の任意の phase が対応しうるので,「任意」を意味する “any” に粒子を意味する “on” をつけた名前が anyon である．) 2 次元平面内に粒子がいくつかあり，その粒子がぶつからないように移動して元の位置に戻るとする．この時粒子の軌跡を図にすると，3 次

元空間内の braid が得られる．(この例だと元の位置に戻っているので pure braid と呼ばれるものになる．) これが braid 群が現れる理由である．Anyon を安定した状態で実験的に作り出してコントロールすることが，トポロジカル量子コンピュータの実現においてたいへん重要だが，これにはたいへん多くの技術的困難がある．この anyon を数学的に記述するのが前に書いたモジュラーテンソル圏 [18] である．マイクロソフトではトポロジカル量子コンピュータの実現のため，数学者を雇ってこの方面の研究をしている．

テンソルネットワークとはテンソルをグラフ状に組み合わせたものである．そこでまずテンソルについて説明しよう．数学においてテンソルという名前がついているものがいくつかあるが，ここでのテンソルはばかばかしいくらい簡単なものである．有限次元ベクトル (a_j) を図形的に表したい．丸を描いてその中にラベル a を書き，そこから足を 1 本出す．この足のラベルが j であり，足にラベル j を書くと，その図は値 a_j を表す．これを 1-テンソルと言う．行列 (a_{jk}) は同様に丸の中に a と書き，2 本の足を出し，その足に j, k をラベルをつける．これが 2-テンソルである．この調子で任意の n-テンソルが定義でき，たとえば図 1 は 4-テンソルである．しかしもちろんこれだけではあまり意味がない．行列 a, b の積の j, l 成分は $\sum_k a_{jk}b_{kl}$ だが，これを図 2 のように描く．この絵の意味は，真ん中のラベルがついていない足についてはすべてのラベルに渡って和を取る，真ん中の足にラベルがついた状態では二つの 2-テンソルの値の積を取るということである．これによって図 2 が $\sum_k a_{jk}b_{kl}$ という値を表していることになる．このようにテンソルをくっつけた描いた図がテンソルネットワークである．いくつかのテンソルがある時はそれらの値の積を取ることを意味しており，ラベルのついていない足については，すべてのラベル付けについて和を取ることを意味している．

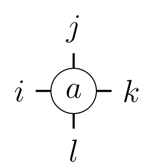

Figure 1: 4-テンソル a

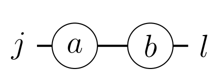

Figure 2: 2-テンソル a, b の積

これだけ見ていると前セクションまでの話と何の関係もないようだが，そうではない．物性物理学者たち [2] は anyon に関連してフュージョン圏の研究に興味を持っており，その中である種の 4-テンソルがフュージョン圏の対象を記述するということを見出した．この論文 [2] は物理の論文であり，数学者にわかるような定義も定理も証明もないのだが，彼らはここに現れる数学的構造が subfactor 理論に現れるも

のと類似していることに気づいており，私の古い論文を引用していた．そこでこの論文をよく読んだところ，彼らはある種の 4-テンソルをフュージョン圏の対象と同一視していること，その 4-テンソルは作用素環論で bi-unitary connection と呼ばれてよく知られているものと同じであることがわかったのである．

Subfactor 理論では無限次元作用素環の包含を近似するために，有限次元作用素環の包含

$$\begin{array}{ccc} A & \subset & B \\ \cap & & \cap \\ C & \subset & D \end{array}$$

を考える．これを $A \subset C$ という包含が，もっと大きな包含 $B \subset D$ に入っているとみなしたいのだが，そのためにはこの 4 つの有限次元作用素環は commuting square と呼ばれるものであることが必要十分であることが知られている．そしてこの commuting square は 4 つのラベルによって決まる複素数の組で記述されることも 1990 年代からよくわかっている．これが bi-unitary connection と呼ばれるもので [2] に現れる 4-テンソルと同じものなのである．(Bi-unitary connection については [5], [11], [21], [22] を参照のこと．) ここで connection という名前は微分幾何学の接続の概念の離散類似ということから来ている．(Commuting square からは 4 つの有限グラフが生じるのだが，これを多様体の離散版と思っているのである．) Bi-unitary という名前は，4 つのラベルで決まる複素数たちが二重にユニタリ行列の成分になっていることから来ている．

この bi-unitary 性をテンソルネットワークで書いたものが図 3 である．ただし本当は正規化のための複雑な係数がつくのだがそれは省略して書いた．(論文 [2] でも係数が省略されているが，[13], [14], [15] に正確なものが書かれている．[2] で計算されている例ではすべて，この係数が 1 なので，問題が生じない．)

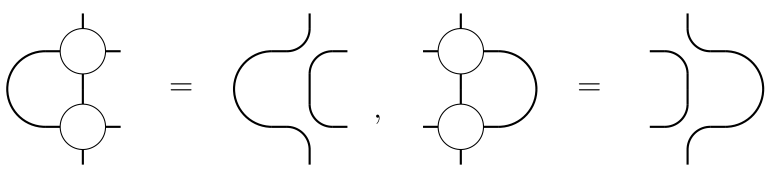

Figure 3: Bi-unitarity の図式表示 (簡略版)

Bi-unitary connection がフュージョン圏の対象を記述することは [1] で示されており，それを用いた重要な具体例の計算も同じ論文でなされている．Bi-unitary connection から生じる 4-テンソルとフュージョン圏の対象の対応をまとめたのが表 1 である．

Table 1: 4-テンソルとフュージョン圏の対象の関係

4-テンソル	フュージョン圏の対象
自明な 4-テンソル	自明対象
直和	直和
既約分解	既約分解
縦の連結	テンソル積
双対 4-テンソル	双対対象
Perron–Frobenius 次元	Perron–Frobenius 次元
zipper 条件を満たす 2-テンソル	intertwiner

これに基づき，物性物理学で考えられている問題や概念を作用素環論の手法で解決したり対応付けたりすることもできているし，逆に物性物理学の問題意識から新たな作用素環論の問題を考えて解くこと [13], [14], [15] もなされている．また，[8], [23] でも物性物理学との別の関係が研究されている．

このテンソルネットワークによる手法が興味を集めている一つの理由は，すべての計算が有限次元の範囲でできることである．作用素環的な手法だと，無限次元の Hilbert 空間や，無限次元の作用素環の自己準同型が自然に現れるので，コンピュータで正確な数値計算を行うのは困難であるのに対し，テンソルネットワークだと少なくとも原理的には，すべての計算を (量子ではない現在の) コンピュータでできるのである．この方向は量子スピン系ともっと深い関係があると期待され，現在も多くの研究が進展しているところである．

References

[1] M. Asaeda and U. Haagerup, Exotic subfactors of finite depth with Jones indices $(5+\sqrt{13})/2$ and $(5+\sqrt{17})/2$, *Comm. Math. Phys.* **202** (1999), 1–63.

[2] N. Bultinck, M. Mariën, D. J. Williamson, M. B. Şahinoğlu, J. Haegeman and F. Verstraete, Anyons and matrix product operator algebras, *Ann. Physics* **378** (2017), 183–233.

[3] S. Carpi, Y. Kawahigashi, R. Longo and M. Weiner, From vertex operator algebras to conformal nets and back, *Mem. Amer. Math. Soc.* **254** (2018), no. 1213, vi+85 pp.

[4] P. Etingof, S. Gelaki, D. Nikshych and V. Ostrik, “Tensor categories”, Mathematical Surveys and Monographs, **205**, American Mathematical Society, Providence (2015).

[5] D. E. Evans and Y. Kawahigashi, “Quantum Symmetries on Operator Algebras”, Oxford University Press, Oxford (1998).

[6] D. E. Evans, Y. Kawahigashi, Subfactors and mathematical physics, *Bull. Amer. Math. Soc.* **60** (2023), 459–482.

[7] A. G. Henriques, J. E. Tener, Every conformal net has an associated unitary VOA, arXiv:2507.20735.

[8] S. Hollands, Anyonic Chains – α-Induction – CFT – Defects – Subfactors, *Comm. Math. Phys.* **399** (2023), 1549–1621.

[9] V. F. R. Jones, Index for subfactors, *Invent. Math.* **72** (1983), 1–25.

[10] V. F. R. Jones, A polynomial invariant for knots via von Neumann algebras, *Bull. Amer. Math. Soc.* **12** (1985), 103–111.

[11] Y. Kawahigashi, On flatness of Ocneanu's connections on the Dynkin diagrams and classification of subfactors, *J. Funct. Anal.* **127** (1995), 63–107.

[12] Y. Kawahigashi, Conformal field theory, vertex operator algebras and operator algebras, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. III, 2597–2616, World Scientific, Rio de Janeiro, 2018.

[13] Y. Kawahigashi, Projector matrix product operators, anyons and higher relative commutants of subfactors, *Math. Ann.* **387** (2023), 2157–2172.

[14] Y. Kawahigashi, Two-dimensional topological order and operator algebras, *Internat. J. Modern Phys. B* **35** (2021), 2130003 (16 pages).

[15] Y. Kawahigashi, The zipper condition for 4-tensors in two-dimensional topological order and the higher relative commutants of a subfactor arising from a commuting square, arXiv:2511.10080.

[16] Y. Kawahigashi and R. Longo, Classification of local conformal nets. Case $c < 1$, *Ann. of Math.* **160** (2004), 493–522.

[17] Y. Kawahigashi, R. Longo and M. Müger, Multi-interval subfactors and modularity of representations in conformal field theory, *Comm. Math. Phys.* **219** (2001), 631–669.

[18] L. Kong, Anyon condensation and tensor categories, *Nucl. Phys. B* **886** (2014), 436–482.

[19] R. Longo, Index of subfactors and statistics of quantum fields, I, *Comm. Math. Phys.* **126** (1989), 217–247.

[20] R. Longo, Index of subfactors and statistics of quantum fields, II. Correspondences, braid group statistics and Jones polynomial, *Comm. Math. Phys.* **130** (1990), 285–309.

[21] A. Ocneanu, Quantized groups, string algebras and Galois theory for algebras, in: Operator algebras and applications, vol. 2, Warwick, 1987, London Mathematical Society, Lecture Note Series, **136**, Cambridge University Press, Cambridge, (1988), pp. 119–172.

[22] A. Ocneanu, “Quantum symmetry, differential geometry of finite graphs and classification of subfactors”, University of Tokyo Seminary Notes **45**, (Notes recorded by Y. Kawahigashi), 1991.

[23] Y. Ogata, D. Pérez-García, A. Ruiz-de-Alarcón, Haag duality for 2D quantum spin systems, arXiv:2509.23734.