1996 年度解析学 IV 期末テスト

1996 年 9 月 10 日
河東泰之

問題用紙は 2 枚あります

答案用紙は，[1] と，[2] 以降を別の紙に書いてください．最初の 15 分間はノートなど 何も見ないで やってください．15 分たったところで，[1] の答案用紙だけを集めます．その後は自筆ノート持ち込み可で行います.（本，プリント，人のノートのコピーなどは不可です.）そして，時間の最後に [2] 以降のほうの答案用紙を集めます．時間は合計 3 時間です．問題はたくさんありますが，1 問 20〜30 点（あるいはそれ以上）でつける予定なので，適当に選択して解いてください．

[1] 次の 4 つの定理のステートメントを書け.
(1) Beppo Levi の定理.（単調収束定理ともいう.）
(2) Fatou の lemma.
(3) Lebesgue の収束定理.
(4) Fubini の定理.

[2] $(X, \mathcal{B}, \mu)$ を測度空間とし，$f(x)$ を X 上の実数値可測可積分関数とする．$E \in \mathcal{B}$ に，$\int_E f(x)\, d\mu$ を対応させる写像 Φ は，$\mathcal{B}$ 上の加法的集合関数であることを示せ.
（これは授業で「明らか」と言った基礎的な事実である．わざわざ証明を聞いているのだから，どのような定理を用いてどのような条件を確認しているのか，詳しく説明すること．安易に「明らかに」などと書いたものは大幅に減点する.）

[3] $(X, \mathcal{B}, \mu)$ を測度空間とし，$\{f_n(x)\}_{n=1,2,\ldots}$ を X 上の可測可積分関数の列で，以下の 3 条件を満たすものとする.
(1) すべての n について，$f_n(x) \geq 0$ a.e.
(2) 定数 C で，すべての n について，$\int_X f_n(x)\, d\mu \leq C$ となるものが取れる.
(3) X 上ほとんどいたるところ，$\{f_n(x)\}_n$ は，$f(x)$ に収束する.
この時，$f(x)$ も，X 上可積分で $\int_X f(x)\, d\mu \leq C$ となることを示せ.

[4] $\mathbf{R}$ の部分集合 A に対し，A の Lebesgue 測度が 0 であることと，次の条件は同値であることを示せ.
「可算個の区間 $I_n = (a_n, b_n)$ が次の 3 条件を満たすように取れる.
(1) $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$.
(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(I_n) < \infty$.
(3) 任意の $x \in A$ は，$\{I_n\}_n$ のうち無限個に属する.」
ただし，ここで $\mu(I_n)$ は区間 I_n の Lebesgue 測度，すなわち $b_n - a_n$ を表す.

[5] (1) $f(x) \in L^2(\mathbf{R})$ と$\varepsilon > 0$ が任意に与えられたとする．この時，$\mathbf{R}$ 上の連続関数 $g(x)$ で，ある有界区間の外では 0 となり，$\|f - g\|_2 < \varepsilon$となるものが存在することを示せ．

(2) $f(x), g(x) \in L^2(\mathbf{R})$ としたとき，$f * g$が定義できて，$\mathbf{R}$ 上の連続関数を定めることを示せ．

[6] 各 $n = 1, 2, 3, \ldots$ について，$[0, 1]$ 上の正値連続関数 $g_n(x)$ が次の 2 条件を満たしているとする．

(a) $x \notin [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$ ならば，$g_n(x) = 0$.

(b) $\displaystyle\int_0^1 g_n(x)\, dx = 1$.

この時，$[0, 1] \times [0, 1]$ 上の関数 $f(x, y)$ を，

$$f(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} (g_n(x) - g_{n+1}(x)) g_n(y)$$

と定める．この時，次の問いに答えよ．

(1) $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y)\, dx \right) dy$と，$\displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y)\, dy \right) dx$ を求めよ．

(2) この例では Fubini の定理の仮定の何が成り立っていないのか，説明せよ．

[7] $f(x)$ を $\mathbf{R}$ 上の Lebesgue 測度に関する正値可測可積分関数とする．$\mathbf{R}$ 上の半開区間 $I = (a, b]$ に対し，$\nu(I) = \displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$ と定め，さらに有限個の半開区間 I_k, $(k = 1, 2, \ldots, n)$ の disjoint union Iについて，$\nu(I) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \nu(I_k)$ と定める．（ただし，$I = (a, b]$ で，$b = \infty$ の時は，$I = (a, \infty)$ と見なす．）このνは，半開区間有限個の disjoint union 全体の上の有限加法的測度になる．授業でやったようにこれを使って外測度Γを定義し，そこからΓ-可測集合や，Γ-可測集合上の測度を定める．この時，次のことを示せ．

(1) $\mathbf{R}$ 上の Borel 集合はΓ-可測である．

(2) $\mathbf{R}$ 上の Borel 集合 A について，$\Gamma(A) = \displaystyle\int_A f(x)\, dx$ である．

ただし，$\mathbf{R}$ 上の Borel 集合とは，$\mathbf{R}$ 上の開集合全体を含む最小の完全加法族に属する集合のことである．