解析学 IV 演習問題

1996 年 5 月 14 日
河東泰之

今年から授業と演習の時間が短くなり，具体的な例や問題を考える時間が減っています．そこで演習問題を配ります．これは自分で考えるためのもので，前で解くとか，レポートを提出するとかいうものではありません．比較的基本的な問題を集めたつもりなので，小テストの復習とともに，ぜひやっておいてください．なお，*印の問題は，伊藤清三「ルベーグ積分入門」に出ているものです．

[1]* Γを集合 X上の外測度とする．Xの部分集合 A と，Γ-可測な部分集合 Bについて，$\Gamma(A\cup B)+\Gamma(A\cap B)=\Gamma(A)+\Gamma(B)$ であることを示せ．

[2]* $(X,\mathcal{B},\mu)$ を測度空間で，$\mu(X)=1$ となるものとする．$A_1,A_2,\dots\in\mathcal{B}$がすべて $\mu(A_n)=1$ を満たすとき，$\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n)=1$ であることを示せ．

[3]* $(X,\mathcal{B},\mu)$ を測度空間とする．$A_1,A_2,\dots\in\mathcal{B}$が$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)<\infty$ を満たす時，$\mu(\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n)=0$, $\mu(\underline{\lim_{n\to\infty}}A_n^c)=\mu(X)$ であることを示せ．

[4] $(X,\mathcal{B},\mu)$ を測度空間とする．Xの部分集合 A で$\mu(A)=0$ または，$\mu(X\setminus A)=0$ となるもの全体を集めたものを $\mathcal{B}'$とする．この $\mathcal{B}'$は完全加法族であることを示せ．

[5] 集合 Xに対し，そのすべての部分集合全体を$\mathcal{B}$とする．この$\mathcal{B}$上の外測度Γを，$\Gamma(\varnothing)=0$, $\Gamma(A)=1$ （$A\neq\varnothing$ の時）で定義する．この時，Γ-可測な集合は何か？

[6]* $\mathbf{R}^n$の部分集合 A に対し，$\mu^*(A)=\mu^*(-A)$ であることを示せ．ただし，ここで $-A=\{-x\mid x\in A\}$ である．

[7]* $E\subset\mathbf{R}^n$を可測集合で$\mu(E)<\infty$ となるものとする．$x\in\mathbf{R}^n$が 0 に近づく時，$\mu(((E+x)\cup E)\setminus((E+x)\cap E))\to 0$ であることを示せ．

[8] R^nの可測集合 A で，$\mu(A)\neq\sup\{\mu(U)\mid U\subset A, U$は開集合$\}$ となるものの例をあげよ．

[9] $A=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\mid x^2+y^2\le 1\}$ に対し，その Lebesgue 測度を求めよ．

[10] θを無理数とする．また，$[0,1)$ を $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ と同一視して，加法群と思う．この時，$x,y\in[0,1)$ に対し，整数 n が $x-y=n\theta$となるように取れるとき，$x\sim y$と定義する．この同値関係の同値類から一つずつ元を取って作った集合 Xは Lebesgue 可測ではないことを示せ．