解析学 IV 小テスト No. 2 の簡単な解説

1996 年 4 月 30 日
河東泰之

[1] 答は,

$$\begin{aligned}
&\{\varnothing, X\},\\
&\{\varnothing, \{a\}, \{b,c\}, X\},\\
&\{\varnothing, \{b\}, \{a,c\}, X\},\\
&\{\varnothing, \{c\}, \{a,b\}, X\},\\
&\{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{b,c\}, \{a,c\}, X\},
\end{aligned}$$

の 5 つ.（答案ではもっとちゃんと説明して下さい.）

[2] $1/n$ は正だから，無限個のものをどのような順序で足しても結果は同じである．したがって，m は有限加法的であり，また完全加法的である.（もっと，長い問題中でこういうのが出てくれば,「明らかに完全加法的」でも，まあいいんですがここではわざわざ理由を聞いてるんですから，何かちゃんと書いてもらわないと減点です.）

[3] (1) は簡単．また，$m(A)$ は A に含まれている整数の個数（無限大も含む）を数えているので，明らかに有限加法的であり，また完全加法的である.（この問題は，授業でやったことからはただちには従いません.）

[4] (1) 有理数 p に対し，$\{p\}$ はいくらでも小さい区間で覆えるので，$\mu^*(\{p\}) = 0$．有理数全体は可算集合だから，$\mathbf{Q} = \{p_n \mid n \in \mathbf{N}\}$ と書いて，$\mu^*(\mathbf{Q}) \le \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(\{p_n\}) = 0$ より，$\mu^*(\mathbf{Q}) = 0$.

(2) $\mu^*([0,1]) = 1$ はすぐわかる．また，(1) と同様にして，$\mu^*(\mathbf{Q} \cap [0,1]) = 0$ なので，劣加法性より，

$$\mu^*([0,1]) \le \mu^*(\mathbf{Q} \cap [0,1]) + \mu^*((\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}) \cap [0,1]) = \mu^*((\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}) \cap [0,1]) \le \mu^*([0,1])$$

となることを用いて，$\mu^*((\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}) \cap [0,1]) = 1$ を得る．

これは，いきなりノーヒントでは難しかったかもしれません．特に (1) で，授業で説明した「確率 1/2 でランダムに分けた集合」の例と混同した人が多かったんですが，有理数は無理数よりずっと「少ない」ので，この場合は状況が全然違います.

配点は 1 番から順に，30, 20, 20, 30 点です．平均点は 42.6 点でした.