解析学 IV 小テスト No. 11 の簡単な解説

1996 年 7 月 16 日
河東泰之

全部簡単な問題のつもりだったんですが，あまりよくはできていませんでした．特に，[1], [3] は Lebesgue の収束定理を使えば事実上 1 行でできる，きわめて簡単な問題のつもりだったんですが，それほどはできていませんでした．なぜ変わったことを始めるのでしょうか．積分と lim が出て来たら，真っ先に考えることは Lebesgue の収束定理であり，それではできないときに初めて，ほかのことを考えるものです．

この種の問題は期末試験にも必ず出ます．

[1] 常に $|e^{-ix\xi}f(x)| = |f(x)|$ だから，可積分関数 $|f(x)|$ で押さえることにより，Lebesgue の収束定理が使えて，lim が積分の中に入って，$\lim_{\xi\to\xi_0} \hat{f}(\xi) = \hat{f}(\xi_0)$ である．

[2] $E_1 = E(|f| > 1)$, $E_2 = E(|f| = 1)$, $E_3 = E(|f| < 1)$ とし，さらに，$f_1(x) = |f(x)|\chi_{E_1}(x)$, $f_2(x) = |f(x)|\chi_{E_2}(x)$, $f_3(x) = |f(x)|\chi_{E_3}(x)$ とおく．仮定と Beppo Levi の定理より，$\lim_{p\to\infty}\int_X f_1(x)^p\, d\mu = \int_{E_1} \infty\, d\mu < \infty$ だから，$\mu(E_1) = 0$ である．あとは，Lebesgue の収束定理（有界収束定理）より，

$$\lim_{p\to\infty}\int_X |f(x)|^p\, d\mu = \lim_{p\to\infty}\int_{E_2} |f(x)|^p\, d\mu + \lim_{p\to\infty}\int_{E_3} |f(x)|^p\, d\mu = \mu(E_2)$$

である．

[3] $0 < h < 1$ としたとき，

$$\begin{aligned} g(x+h) - g(x) &= \int_{x+1}^{x+1+h} f(t)\, dt - \int_{x-1}^{x-1+h} f(t)\, dt \\ &= \int_{\mathbf{R}} (\chi_{(x+1,x+1+h)}(t) - \chi_{(x-1,x-1+h)}(t)) f(t)\, dt \end{aligned}$$

である．この右辺の積分される関数の絶対値は可積分関数 $|f(t)|$ で押さえられているので，Lebesgue の収束定理が使えて，$h \to 0$ の時，上の式は 0 に収束する．$h < 0$ のときも同様．

配点は 1 番から順に，30, 40, 30 点です．最高点は 100 点（1 人），平均点は 42.1 点でした．