2016 年解析学特別演習 I テスト (10) 解答解説

河東泰之 (かわひがしやすゆき)
数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)
e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
`http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/`

平均点は 61 点，最高点は 100 点 (3 人) でした．

[1] 自然数 k, m に対し，$E_{km} = \{x \in X \mid |f_k(x) - f_m(x)| > \|f_k - f_m\|_\infty\}$ とおきます．$E = \bigcup_{k,m=1}^{\infty} E_{km}$ とおけば E の測度は 0 で，$x \notin X$ のときは $\{f_k(x)\}_k$ が Cauchy 列なので収束します．

[2] まず convolution の定義式で $x-y$ と y を入れ替えることにより $f*g = g*f$ に注意します．よって $(f*g)*h = (g*f)*h$ であり，$(g*f)*h$ が $L^1(\mathbb{R})$ の元であることより，x についてほとんどいたるところ $\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} g(x-y-z)f(y)h(z)\,dy\,dz$ は可積分です．したがってそのような x について Fubini の定理が使えて $(g*f)*h(x) = (g*h)*f(x)$ となります．よって，$(f*g)*h = (g*f)*h = (g*h)*f = f*(g*h)$ を得ます．

[3] $\mu(E) < \infty$ ならば，$f \in L^2(E)$ のとき，Cauchy-Schwarz の不等式より

$$\int_E |f(x)|\,dx \le \left(\int_E |f(x)|^2\,dx\right)^{1/2} \left(\int_E \chi_E(x)^2\,dx\right)^{1/2} < \infty$$

となるので $L^2(E) \subset L^1(E)$ です．

逆に $\mu(E) = \infty$ とすると，$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ (disjoint union), $1 < \mu(E_k) < \infty$ と書けます．このとき $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\mu(E_k)}} \chi_{E_k}(x)$ とおけば，$f \in L^2(E)$, $f \notin L^1(E)$ となります．

よって答えは $\mu(E) < \infty$ です．

[4] たとえば $f_k(x) = \chi_{(0,1/n)}(x)$ とおけばできます．

[5] 数列 $x = (x^1, x^2, x^3, \dots)$ に対し，$|x^m| \le \|x\|_p$ なので，$\|x\|_\infty \le \|x\|_p$ となります．これより結論を得ます．