

2016 年解析学特別演習 I テスト (9)

河東泰之 (かわひがしやすゆき)
 数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)
 e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
<http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/>

解答用紙の一番上に学生証番号と氏名を書いてください。

このテストは、ノート持ち込み可で行います。電子機器の使用は不可です。

途中の計算、説明などをきちんと書いてください。答案用紙は 1 枚両面です。それに収まるように書いてください。

[1] A, B を \mathbb{R} の Lebesgue 可測部分集合とする。

$$\int_{\mathbb{R}} \mu((A+x) \cap B) dx = \mu(A)\mu(B)$$

であることを示せ。ただしここで、 μ は Lebesgue 測度であり $A+x = \{y+x \mid y \in A\}$ である。

[2] 各 $k = 1, 2, 3, \dots$ について、 $[0, 1]$ 上の正值連続関数 $g_k(x)$ が次の 2 条件を満たしているとする。

(a) $x \notin [\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}]$ ならば、 $g_k(x) = 0$ 。

(b) $\int_0^1 g_k(x) dx = 1$ 。

この時、 $[0, 1] \times [0, 1]$ 上の関数 $f(x, y)$ を、

$$f(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} (g_k(x) - g_{k+1}(x))g_k(y)$$

と定める。この時、次の問いに答えよ。

(1) $\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) dx \right) dy$ と、 $\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) dy \right) dx$ を求めよ。

(2) この例では Fubini の定理の仮定の何が成り立っていないのか、説明せよ。

[3] $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ のとき、実数 t について

$$\int_{\mathbb{R}} (f * g)(x) e^{-ixt} dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ixt} dx \int_{\mathbb{R}} g(x) e^{-ixt} dx$$

であることを示せ。

[4] $x > 0$ に対して $\frac{1}{x} = \int_0^{\infty} e^{-xt} dt$ であることと Fubini の定理を使って $\lim_{c \rightarrow \infty} \int_0^c \frac{\sin x}{x} dx$ を求めよ。