2016 年解析学特別演習 I テスト (6) 解答解説

河東泰之 (かわひがしやすゆき)
数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)
e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
`http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/`

配点各問 25 点です．平均点は 68 点，最高点は 100 点 (4 人) でした．

[1] 単調収束定理により，Lebesgue 積分として $\lim_{n\to\infty}\int_0^n f(x)\ dx = \int_0^\infty f(x)\ dx$ です．左辺の積分は Riemann 積分と同じで，この極限が (有限値として) 存在すると仮定しているので，右辺も有限値となり，Lebesgue 可積分となります．

[2] $\int_0^1 |x-p_k|^{-1/2}\ dx \le \int_{-1}^1 |x|^{-1/2}\ dx = 4$ なので，単調収束定理より，

$$\int_0^1 \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{2^k}|x-p_k|^{-1/2}\ dx \le 4\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{2^k} = 4$$

となります．これは $[0,1]$ 上で $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{2^k}|x-p_k|^{-1/2} < \infty$ a.e. を意味しています．

[3] $\frac{1}{t}\int_0^\infty (\sin tx - tx) f(x)\ dx = \int_0^\infty \frac{\sin tx - tx}{tx} x f(x)\ dx$ であり，$t, x > 0$ のとき $\left|\frac{\sin tx - tx}{tx}\right| \le 2$ なので Lebesgue の収束定理が使えます．$\lim_{t\to 0}\frac{\sin tx - tx}{tx} = 0$ なので結論を得ます．

[4] k, $p(x)$ を決めたとき，$M = \sup_x |p(x)(-ix)^k e^{-x^2/2}|$ とおくとこれは有限値です．被積分関数を t で k 回微分したものの絶対値は，t によらず可積分関数 $Me^{-x^2/2}$ で抑えられるため，積分記号下の微分が k 回できます．k は任意なので結論を得ます．