2015 年解析学特別演習 I テスト (4)

河東泰之 (かわひがしやすゆき)
数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)
e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

解答用紙の一番上に学生証番号と氏名を書いてください．
このテストは，ノート持ち込み可で行います．電子機器の使用は不可です．
途中の計算，説明などをきちんと書いてください．答案用紙は 1 枚両面です．それに収まるように書いてください．

[1] (1) 単関数は可測であることを示せ．
(2) $f_n : X \to [0,\infty) \cup \{\infty\}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ を可測関数とする．$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ も可測であることを示せ．

[2] $(X, \mathcal{B}, \mu)$ を測度空間，$f : X \to \mathbb{R}$ を可測関数，$\mu(X) = 1$ とする．任意の $\varepsilon > 0$ に対し，$N > 0$ が存在して $\mu(\{x \in X \mid f(x) > N\}) < \varepsilon$ となることを示せ．

[3] $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を Lebesgue 可測関数とする．$\mathbb{R}$ 内の任意の開集合 U に対し，$f^{-1}(U)$ は Lebesgue 可測集合であることを示せ．

[4] E を $\mathbb{R}^n$ 内の Lebesgue 可測集合とする．

$$\mu(E) = \sup\{\mu(F) \mid F \subset E, F \text{ はコンパクト集合}\}$$

を示せ．