2015 年解析学特別演習 I テスト (3) 解答解説

河東泰之 (かわひがしやすゆき)
数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)
e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

配点は 1 問 25 点です．平均点は 63.0 点，最高点は 100 点 (10 人) でした．解答は略解です．実際の答案ではもっと詳しく書く必要があります．

[1] $\mathbb{R} = (-\infty, 0] \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} (1/(n+1), 1/n] \cup (1, \infty)$ とおおうことができ，ここに出てくる区間はすべて $m$ で測って 0 なので，$\Gamma(\mathbb{R}) = 0$ を得る．したがって任意の $A \subset \mathbb{R}$ に対して $\Gamma(A) = 0$ である．

[2] $[-n, n]$ はコンパクトなので，その $f$ による像は，コンパクト，したがって閉である．$f(\mathbb{R}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f([-n, n])$ なので閉集合の可算和となり，Lebesgue 可測である．

[3] $f$ の連続性より，$\{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}$ は $\mathbb{R}^2$ は閉集合なので，Lebesgue 可測である．整数 $n$ について $n \le x \le n+1$ で考えれば $f$ は一様連続なので，任意の $\varepsilon > 0$ に対し，区間 $[n, n+1]$ を十分細かく等分することにより，$\{(x, f(x)) \mid n \le x \le n+1\}$ は長方形の有限和で面積 $\varepsilon$ となるものでおおわれる．よって $\{(x, f(x)) \mid n \le x \le n+1\}$ の Lebesgue 測度は 0 であり，可算和を取って，$\{(x, f(x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ の Lebesgue 測度も 0 である．

[4] (1) $A_r$ は開集合なので Lebesgue 可測である．
(2) $r \le f(r) \le 2r$ がすぐにわかる．また $f$ は (広義) 単調増大かつ連続であることも簡単にわかるので，取りうる値の範囲は $(0, \infty)$ である．