2015 年解析学特別演習 I テスト (11)

河東泰之 (かわひがしやすゆき)
数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)
e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

解答用紙の一番上に学生証番号と氏名を書いてください.
このテストは，ノート持ち込み可で行います．電子機器の使用は不可です.
途中の計算，説明などをきちんと書いてください．答案用紙は 1 枚両面です．それに収まるように書いてください.

[1]

$$C_\infty(\mathbb{R}) = \{f \mid \mathbb{R}\text{ 上の複素数値連続関数で } \lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0\}$$

とおく．$f \in C_\infty(\mathbb{R})$, $g \in L^1(\mathbb{R})$ のとき，$f * g \in C_\infty(\mathbb{R})$ であることを示せ.

[2] $f(x)$ を $\mathbb{R}$ 上の Lebesgue 可測関数で，すべての有界区間上で可積分となるものとする．すべての $g \in C_0(\mathbb{R})$ に対して $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} fg\,dx = 0$ であれば，$f(x) = 0$ a.e. であることを示せ.

[3] $(X, \mathcal{B}, \mu)$ 上の実数値可積分関数 f を取り，$E \in \mathcal{B}$ に対し，$\Phi(E) = \displaystyle\int_E f\,d\mu$ とおくとこれは加法的集合関数である.
(1) この Φ の Jordan 分解を具体的に記述せよ.
(2) この Φ の Hahn 分解を具体的に記述せよ.

[4] $(X, \mathcal{B}, \mu)$ 上の複素数値可積分関数 f を取り，$E \in \mathcal{B}$ に対し，$\Phi(E) = \displaystyle\int_E f\,d\mu$ とおく．X を $X = \displaystyle\bigcup_{k=1}^m E_k$ (disjoint union, $E_k \in \mathcal{B}$) と表したとき，このようなすべての表示について $\displaystyle\sum_{k=1}^m |\Phi(E_k)|$ の上限を取ると，$\displaystyle\int_X |f(x)|\,d\mu$ に等しいことを示せ.