2015 年解析学特別演習 I テスト (8)

河東泰之 (かわひがしやすゆき)
数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)
e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

解答用紙の一番上に学生証番号と氏名を書いてください.
このテストは，ノート持ち込み可で行います．電子機器の使用は不可です.
途中の計算，説明などをきちんと書いてください．答案用紙は 1 枚両面です．それに収まるように書いてください.

[1] 実数 α に対し $I(\alpha) = \int_0^\infty e^{-x^2} \cos \alpha x \, dx$ とおく.
(1) $I'(\alpha)$ と $I(\alpha)$ の関係を求めよ.
(2) $I(\alpha)$ を求めよ.

[2] $(X, \mathcal{B}, \mu)$ を測度空間とする．X 上の実数値可測関数列 $\{f_n(x)\}_n$ について，X の各点で $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ であるとする．また，定数 C で，各 n について，$\int_X |f_n(x)| \, d\mu \leq C$ なるものが存在するとする．このとき，次の問に答えよ.
(1) $f(x)$ が可積分で，$\int_X |f(x)| \, d\mu \leq C$ を満たすことを示せ.
(2) 上の条件を満たしているが，$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x) \, d\mu = \int_X f(x) \, d\mu$ が成立しないような例を挙げよ.

[3] f を測度空間 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ 上の可積分関数とする.
(1) $\lim_{c\to\infty} \int_{\{|f(x)|>c\}} f \, d\mu = 0$ を示せ.
(2) 任意の $\varepsilon > 0$ に対し，次の条件を満たす $\delta > 0$ が存在することを示せ.
$B \in \mathcal{B}$, $\mu(B) < \delta$ ならば $\left| \int_B f \, d\mu \right| < \varepsilon$ となる.

[4] A, B を $\mathbb{R}$ の Lebesgue 可測部分集合とする.

$$\int_{\mathbb{R}} \mu((A + x) \cap B) \, dx = \mu(A)\mu(B)$$

であることを示せ．ただしここで，μ は Lebesgue 測度であり $A + x = \{y + x \mid y \in A\}$ である.