解析学 IV 小テスト No. 15 略解・解説

2000 年 7 月 24 日
河東泰之 (かわひがしやすゆき)
e-mail: yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

今回の配点は [1] から順に 30, 40, 30 点で，平均は 28.9 点，最高は 95 点 (1 人) でした．採点は Teaching Assistant の岸本君 (1 番) と勝良君 (2 番, 3 番) です．簡単な解説をつけます．

[1] $\mathbf{R}$ のかわりに $\mathbf{Z}$ にすれば授業とまったく同様に証明できます．つまり，Fubini にあたるのは今は,「正項級数の和を取るときはどのような順序で足してもよい」というあたりまえのことで，あとは，$p = 1$ のときはただ和を取る順序を変えるだけでよく，$p > 1$ のときは $\mathbf{R}$ の時と同様に Hölder の定理を使います．

[2] (1) は L^1 で平行移動する操作が L^1-norm で連続なことからわかります．
(2) たとえば $f(x) = g(x) = 1/\sqrt{|x|}$ とでもすればよいでしょう．

[3] そのような $f(x)$ は存在しません．仮に存在したとしましょう．$g(x)$ として，正値 compact 台で積分値が 1 のまま台が小さくなって行くようなもの $g_n(x)$ を授業のように取ります．もし，$f * g_n = g_n$ とすると，任意の正の数 r について，n を十分大きく取ったとき右辺は $(-\infty, -r) \cup (r, \infty)$ で 0 ですから，$\|f * g_n - f\|_1 \to 0$ より $f(x)$ も，$(-\infty, -r) \cup (r, \infty)$ 上ほとんどいたるところ 0 ということになります．$r > 0$ は任意ですから，$f(x)$ はほとんどいたるところ 0 になりますが，それではおかしいことは明らかです．

[お詫び] 前回皆さんの答案に書いた平均点の計算に誤りがありましたが，A–D の成績には影響しません．また，15 回目の点を考慮した平均でも，A–D の成績に変化はありませんでした．15 回目も計算に入れた正しい平均点は，期末テストと一緒に知らせます．