# 解析学 IV 小テスト No. 9

2000 年 6 月 20 日
河東泰之 (かわひがしやすゆき)
e-mail: yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

時間は午前 10 時から正午までの 2 時間です.

解答は別紙に書いてください．学生証番号，氏名を一番上に書いてください．解答用紙の裏面を使用してもけっこうです．自分のノートを参照してかまいませんが，本は見ないでください.

[1] $\mathcal{B}$ を $\mathbf{R}$ 上の Borel 集合全体のなす完全加法族とする．$\mathcal{B}$ と $\mathcal{B}$ の直積として得られる $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ 上の完全加法族は，$\mathbf{R}^2$ 上の Borel 集合全体のなす完全加法族と等しいことを示せ.

[2] $\mathbf{R}^2$ には Lebesgue 可測集合だが Borel 集合ではないものが存在することを示せ.

[3] $(X, \mathcal{B}_X, \mu_X)$, $(Y, \mathcal{B}_Y, \mu_Y)$ をそれぞれ $\sigma$-finite な測度空間とし，$K = E_1 \times F_1 \cup E_2 \times F_2 \cup \cdots \cup E_n \times F_n$ (disjoint union), $E_j \in \mathcal{B}_X$, $F_j \in \mathcal{B}_Y$ の形で書ける集合全体を $\mathcal{F}$ とする．またこの集合 $K$ について $m(K) = \sum_{j=1}^n \mu_X(E_j)\mu_Y(F_j)$ とおき，この $m$ から $X \times Y$ 上の外測度 $\Gamma$ をいつもの方法で作る．$\Gamma$ を $\mathcal{F}$ の生成する完全加法族 $\mathcal{B}_{X\times Y}$ に制限したものを $\mu_{X\times Y}$ として，この測度の完備化を $(X \times Y, \overline{\mathcal{B}}_{X\times Y}, \overline{\mu}_{X\times Y})$ とする．(ここまで講義と同じである．) 一方 $X \times Y$ の $\Gamma$-可測な集合全体を $\mathcal{B}$ とし，$\Gamma$ をそこに制限したものを $\mu$ と書く．このとき $(\overline{\mathcal{B}}_{X\times Y}, \overline{\mu}_{X\times Y})$ と $(\mathcal{B}, \mu)$ は等しいか．理由をつけて答えよ.