解析学 IV 小テスト No. 5 略解・解説

2000 年 5 月 23 日
河東泰之 (かわひがしやすゆき)
e-mail: yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
http://kyokan.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

今回の配点は [1] から順に 40, 30, 30 点で，平均は 38.8 点，最高は 85 点 (1 人) でした．採点は Teaching Assistant の岸本君です．簡単な解説をつけます．

[1] これは簡単で，$\mathbf{R}$ の空でない開集合の Lebesgue 測度は真に正なので，$f(x)=g(x)$ となる点が稠密にあるということです．

[2] いろいろ作り方はありますが，たとえば有理数に番号を付けて $\{p_n\}_n$ として，$f(x)=\displaystyle\sum_{n;p_n<x}\frac{1}{2^n}$ とすれば比較的簡単にできます．これは稠密な点で gap があるように作ってあるので，問題の性質を満たすことがわかります．

また，[3] の例はこちらの例にもなっています．

[3] これはほぼ全滅で，説明抜きでかなり正解に近い答えを書いていた人が一人いただけでした．

たとえば再び有理数に番号を付けて $\{p_n\}_n$ として，

$$f(x)=\begin{cases}\displaystyle\sum_n \frac{1}{2^n}\frac{1}{|x-p_n|}, & \text{無限級数が収束するとき,}\\ 0, & \text{その他のとき,}\end{cases}$$

とすればできます．x が有理数のときも「その他のとき」と解釈しますが，この「その他のとき」が起こる x 全体の測度が 0 であることが次のようにわかります．

$I_n=(p_n-\frac{1}{\sqrt{2}^n},p_n+\frac{1}{\sqrt{2}^n})$ とおくと，I_n の外では，$\left|\dfrac{1}{2^n}\dfrac{1}{|x-p_n|}\right|\le\dfrac{1}{\sqrt{2}^n}$ です．だから，$\displaystyle\bigcup_{n\ge k}I_n\cup\{p_1,\dots,p_{k-1}\}$ の外では無限級数は，

$$(\text{有限項})+\left(\sum_{n\ge k}\frac{1}{\sqrt{2}^n}\text{で抑えられる項}\right)$$

となって，収束します．$k\to\infty$ とすると，$\displaystyle\bigcup_{n\ge k}I_n\cup\{p_1,\dots,p_{k-1}\}$ の測度は 0 に収束するので，結局ほとんどいたるところこの無限級数は収束します．

だから本質的には $f(x)$ は第 1 の場合で表され，どのような空でない開区間をとっても，その中の p について $\dfrac{1}{|x-p|}$ の形の項を含むので積分は無限大になります．